Filtrage d'un processus partiellement observé dans le cas d'un grand rapport signal-bruit pour un système corrélé

Marie-Noelle Dietsch

Nous nous proposons d'étudier un problème de filtrage non linéaire dans le cas d'un grand rapport signal-bruit, lorsque seule une des composantes du signal est observée.

Un problème de filtrage comporte deux équations, l'une régissant un signal que nous noterons X_t et l'autre donnant une observation notée Y_t (qui est connue), le signal dépendant de l'observation et cherchant à être estimé grâce à la connaissance de ces observations. En fait nous cherchons à calculer la meilleure approximation de la loi de X_t grâce aux observations de Y jusqu'à l'instant t : il s'agit de la loi conditionnelle de X_t sachant $\mathcal{Y}_t = \sigma(Y_s, 0 \leq s \leq t)$, la tribu engendrée par les trajectoires de l'observation jusqu'au temps t (c'est-à-dire le passé des observations). Pour ce faire, nous définissons, pour toute fonction continue φ, le filtre π_t associé au problème de filtrage par $\pi_t(\varphi) = E[\varphi(X_t)/\mathcal{Y}_t]$, qui représente la loi conditionnelle de X_t sachant $\mathcal{Y}_t$ et le filtre non normalisé ρ_t associé au problème de filtrage par $\rho_t(\varphi) = \widetilde{E}[\varphi(X_t)\Gamma_t/\mathcal{Y}_t]$ (la probabilité $\widetilde{P}$ sous laquelle nous prenons l'espérance conditionnelle et le processus Γ_t seront définis dans la suite). Ces filtres sont reliés par la formule de Kalliampur-Striebel (voir [4]) $\pi_t(\varphi) = \frac{\rho_t(\varphi)}{\rho_t(1)}$ Nous montrons alors que le filtre est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique appelée l'équation de Kushner-Stratonovitch et que le filtre non normalisé est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique linéaire, l'équation de Zakai, qui est utilisée numériquement.

Nous nous plaçons dans un cas particulier où le signal X_t est de dimension deux, c'est-à-dire que $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ et que seule la composante X_t^1 dépend de l'observation, c'est pourquoi nous parlons de processus partiellement observé. De plus, nous faisons dépendre l'observation d'un paramètre ε qui est supposé petit et qui entraîne un grand rapport entre le signal et le bruit (i.e. le processus de Wiener) dont dépend l'observation.

Soient donc ε un réel strictement positif et $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ et Yt le couple de martingales solution du problème de filtrage suivant

$$\begin{cases} X_t^1 = X_0^1 + \int_0^t f_1(X_s^1, X_s^2)ds + \int_0^T k(X_s^1)dV_s^1 \\ \\ X_t^2 = X_0^2 + \int_0^t f_2(X_s^1, X_s^2)ds + \int_0^T l(X_s^2)dV_s^2 + \int_0^T b(X_s^2)dW_s \\ \\ Y_t = \int_0^t h(X_s^1)ds + \varepsilon W_t \end{cases} \tag{1}$$

où V_t^1, V_t^2, W_t sont des processus de Wiener unidimensionnels indépendants, f_1, f_2, k, l, b et h appartiennent à $C_b^3(\mathbb{R}), k \neq 0, h$ est injective par rapport à X^1 et il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < h'(x)$.

De plus, nous supposons que pour tout (x^1, x^2) dans $\mathbb{R}^2$, la fonction g définie par $g(x^1, x^2) = \int_0^{x^1} [k^2(u)]^{-1} f_1(u, x^2) du$ est bornée ainsi que ses trois premières dérivées.

Les filtres approchés associés à de tels problèmes ont été étudiés, pour des processus unidimentionnels avec $b = 0$ et g constant par R.Katzur, B.Bobrovski et Z.Schuss [5] et par A.Bensoussan [1]. J.Picard [7] a étudié ce problème dans le cas d'une diffusion vectorielle avec $b = 0$. Le cas X dans $\mathbb{R}^2$ et $b = 0$ a été traité par A.Gegout-Petit [3] et nous généralisons ce résultat lorsque $b \neq 0$.

Nous voulons donc déterminer les équations du filtrage pour (1), i.e. trouver une bonne approximation de la loi de X_t sachant $\mathcal{Y}_t = \sigma(Y_s, 0 \leq s \leq t)$, ce qui revient dans notre cas, comme h observe X^1, à calculer $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ pour φ variant dans une grande classe de fonctions (car il est alors facile de calculer une bonne approximation de $E[X_t^1/\mathcal{Y}_t]$).

Nous allons utiliser une méthode de filtres approchés (voir A.Gégout-Petit [3]) de la façon suivante : Y.Takeuchi ét H.Akashi (voir [8]) ont montré que $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ tend en probabilité vers $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{X}_t^1]$ quand ε tend vers 0, ce qui nous ramène à un problème de filtrage où X^2 est le signal et X^1 l'observation. Nous cherchons alors un filtre approché pour $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{X}_t^1]$ et l'ordre de ce filtre approché par rapport à $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$. Ensuite nous établissons une équation de type Kushner-Stratonovitch pour le filtre approché (équation qui aura l'avantage d'être indépendante de X^1, ce qui n'est pas le cas de l'équation de Kushner-Stratonovitch vérifiée par $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$, et nous aurons alors une estimation de $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ par passage à la limite quand ε tend vers 0 grâce à la continuité du filtre par rapport à l'observation (voir M.Chaleyat-Maurel et D.Michel [2]).

1 Un filtre approché pour X^1

Considérons le processus stochastique $M_t = X_0^1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t k(M_s)(dY_s - h(M_s)ds)$.

Théorème 1. *Soit $T > 0$ fixé. Sous la probabilité P nous avons, pour tout $t \in [0, T]$,*

$$X_t^1 - M_t = O(\sqrt{\varepsilon}) \text{ et } E[X_t^1/\mathcal{Y}_t] - M_t = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Remarque. *Nous disons alors que M_t est un filtre approché d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ de X_t^1. Avoir un filtre approché pour X^1 nous permettra de trouver l'ordre entre $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ et son filtre approché μ_t, car la différence $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t] - \mu_t$ s'exprime en fonction de $X_t^1 - M_t$ dont nous connaissons à présent l'ordre.*

2 Un changement de probabilité

Soit Γ_t le processus stochastique défini par

$$\Gamma_t = exp\left(\int_0^t [k^2(X_s^1)]^{-1} f_1(X_s^1, X_s^2)dX_s^1 - \frac{1}{2}\int_0^t [k^-1(X_s^1)f_1(X_s^1, X_s^2)]^2 ds\right)$$

Supposons que $E(\Gamma_t^{-1}) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

Alors, d'après le théorème de Girsanov, sous la probabilité $\tilde{P}$ définie sur (Ω, $\mathcal{F}$, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) par $\frac{d\tilde{P}}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \Gamma_t^1$, le processus stochastique $\tilde{X}_t^1 = \int_0^t k^-1(X_s^1)dX_s^1$ est un $\mathcal{F}_t$-processus de Wiener.

De plus, si nous supposons que $\mathcal{X}_t^1 = \tilde{\mathcal{X}}_t^1$, alors, sous $\tilde{P}$, le processus stochastique X_t^1 est indépendant de V_t^2 et W_t.

Par ailleurs, en appliquant la formule d'Itô à $g(X_t^1, X_t^2)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\Gamma_t = exp\Bigg(&g(X_t^1, X_t^2) - g(X_0^1, X_0^2) - \int_0^t (\mathcal{L}_{s,X_s^1} g)(X_s^2)ds \\ &+ \int_0^t k^{-1}(X_s^1)f_1(X_s^1, X_s^2)\frac{\partial k}{\partial x_1}(X_s^1)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_s^1, X_s^2)ds \\ &- \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_2}(X_s^1, X_s^2)b(X_s^2)dW_s - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_2}(X_s^1, X_s^2)l(X_s^2)dV_s^2 \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t [k^{-1}(X_s^1)f_1(X_s^1, X_s^2)]^2 ds\Bigg)\end{aligned}$$

où $(\mathcal{L}_{(s,X_s^1)}g)(X_s^2) = \frac{\partial g}{\partial x_2}(X_s^1, X_s^2)f_2(X_s^1, X_s^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(X_s^1, X_s^2)(l^2(X_s^2) + b^2(X_s^2))$.
Alors, pour toute trajectoire $x \in C([0,T];\mathbb{R})$ définissons $X_t^2(x)$ et $\Gamma_t(x)$ en remplaçant, dans la définition de X_t^2 et dans l'expression de Γ_t ci-dessus, X_s^1 par x et X_s^2 par $X_s^2(x)$.

Remarque. *h étant injective par rapport à X^1, X^1 peut être considéré comme étant l'observation du système (1), et il est alors naturel de faire un changement de probabilité par rapport à X^1.*

3 Un filtre approché pour $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$

Dans le but de définir un filtre approché μ_t pour $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$, posons $\tilde{X}_t^2 = X_t^2(M)$, $\tilde{\Gamma}_t = \Gamma_t(M)$ et définissons alors, pour tout $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\mu_t(\varphi) = \frac{\tilde{E}[\varphi(\tilde{X}_t^2)\tilde{\Gamma}_t/\mathcal{M}_t]}{\tilde{E}[\tilde{\Gamma}_t/\mathcal{M}_t]}$

En fait, le processus stochastique X^1 étant proche de M, nous nous attendons à ce que $\mu_t(\varphi)$ soit proche de $\frac{\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\Gamma_t/\mathcal{M}_t]}{\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{M}_t]} = E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{X}_t^1]$ (cette relation est la formule de Kalliampur-Striebel) et alors, comme $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ tend vers $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{X}_t^1]$ en probabilité lorsque ε tend vers 0, nous pensons obtenir un processus stochastique proche de $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$.

Proposition 1. *Soit $T < \infty$ fixé. Si pour tout $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$, il existe n tel que*

$$\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\varphi(\tilde{X}_t^2)\tilde{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t] = O(\varepsilon^n),$$

alors, pour tout $t \in [0,T]$, $\mu_t(\varphi) - E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t] = O(\varepsilon^n)$.

Théorème 2. *Soit $T > 0$ fixé. Alors pour tout $t \in [0,T]$ nous avons*

$$\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\varphi(\tilde{X}_t^2)\tilde{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t] = O(\sqrt{\varepsilon})$$

4 Une équation pour le filtre approché $\mu_t(p)$

Dans cette partie nous obtenons une équation de type Zakai pour $\sigma_t(\varphi) = \tilde{E}[\varphi(\tilde{X}_t^2)\tilde{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]$ (qui est un filtre approché d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ du filtre non normalisé) et ensuite une équation de type Kushner-Stratonovitch pour $\mu_t(\varphi)$ (qui est un filtre approché d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ du filtre), indépendante de X^1.

Théorème 3. *Pour tout $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\sigma_t(\varphi)$ est solution de l'équation de type Zakai suivante :*

$$\sigma_t(\varphi) = \sigma_0(\varphi) + \int_0^t \sigma_s(\mathcal{L}_{s,M_s}\varphi)ds + \int_0^t \sigma_s\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi' b(h(M_s) - h(X_s^1))\right)ds$$
$$+ \int_0^t \sigma_s(k^{-1}(M_s)f_1(M_s,.)\varphi' b)ds + \int_0^t \sigma_s(k^{-2}(M_s)f_1(M_s,.)\varphi + k^{-1}(M_s)\varphi' b)dM_s.$$

Théorème 4. *Pour tout $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\sigma_t(\varphi)$ est solution de l'équation de type Kushner-Stratonovitch suivante :*

$$\mu_t(\varphi) = E[X_0^2] + \int_0^t \left(\mu_s(\mathcal{L}_{s,M_s}\varphi) + \mu_s(\frac{1}{\varepsilon}(h(M_s) - h(X_s^1))\varphi' b) + \mu_s(k^{-1}(M_s)f_1(M_s,.)\varphi' b)\right)ds$$
$$+ \int_0^t \left[\mu_s(k^{-2}(M_s)f_1(M_s,.)\varphi + k^{-1}(M_s)\varphi' b) - \mu_s(\varphi)\mu_s(k^{-2}(M_s)f_1(M_s,.))\right]$$
$$\times \left[dM_s - \mu_s(k^{-2}(M_s)f_1(M_s,.))k^2(M_s)ds\right].$$

L'article complet contenant ces résultats est à paraître dans *Stochastic Analysis and Applications.*

Bibliographie

[1] *A.Bensoussan*, On some approximation techniques in nonlinear filtering. *Stochastic Differential Systems, Stochastic Control and Application*, (Mineapolis 1986), Springer (1988).

[2] *M. Chaleyat-Maurel, D. Michel*, Une propriété de continuité en filtrage non linéaire, *Stochastics* **19** (1986), 11-40.

[3] *A. Gegout-Petit*, Filtrage d'un processus partiellement observé et équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies, *Thèse*, Université de Provence (1995).

[4] *G.Kallianpur*, Stochastic filtering theory, Springer (1980).

[5] *R.Katzur,B.Bobrovski,Z.Schuss*, Asymptotic analysis of the optimal filtering problem for one-dimentional diffusions measured in a low noise Chanel. *SIAM J. Applied Math.* **44** (1984) Part I : 591-604, Part II : 1176-1191.

[6] *E.Pardoux*, Filtrage non linéaire et équations aux dérivées partielles stochastiques associées, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX, *Lectures Notes in Mathematics* **1464**, Springer Verlag, Berlin (1991) 67-163.

[7] *J.Picard*, Filtrage de diffusions vectorielles faiblement bruitées, Analysis and Optimisation of Systems, *Lectures Notes in Control and Informatic Sciences* **83**, Springer (1986).

[8] *Y. Takeuchi and H.Akashi*, Least-squares state estimation of systems with state dependent observation noise, *Ann. of Probability*, **6** (1978), 19-41.

[9] *M. Zakai*, On the optimal filtering of diffusion processes, *Zeit. Wahr. Verw. Gab.*, **11** (1969), 230-243.

Département de Mathématiques
Université de Metz
Ile du Saulcy, BP 80794, F-57012 Metz FRANCE
dietsch@poncelet.sciences.univ-metz.fr