Analyse sur l'espace des matrices symétriques

Nicole Bopp

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V = \mathcal{S}ym(n, \mathbb{C})$ des matrices symétriques $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée donnée par $(X|Y) = \mathrm{Re}(\mathrm{trace}\,(XY))$. Ceci permet de définir la transformée de Fourier d'une « bonne » fonction f définie sur V par

$$[\mathcal{F}f](Y) = \int_V f(X) e^{4i\pi(X|Y)}\, dX \ ,$$

où dX est une mesure de Lebesgue sur V. Les propriétés de cette transformation sont bien connues (formule de Plancherel, formule d'inversion) et leur étude est l'objet de *l'analyse harmonique dite commutative* car elle est liée à la structure de groupe commutatif (pour l'addition) de V. En particulier les applications $X \mapsto e^{4i\pi(X|Y)}$ sont les morphismes du groupe V dans le groupe multiplicatif $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
D'autre part le groupe $G = GL(n, \mathbb{C})$ opère sur V par

$$(G \times V) \ni (g, X) \mapsto gX{}^tg \text{ où } {}^tg \text{ est la transposée de la matrice } g\ .$$

C'est une représentation de G sur V c'est-à-dire un morphisme de groupe de G dans $GL(V)$. Les représentations sont les objets (remplaçant les exponentielles) permettant de faire *l'analyse harmonique dite non commutative* des espaces de fonctions sur G.

Ces deux analyses faites simultanément (mises en valeur dans [8] pour l'action de $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$ sur $M(n, \mathbb{C})$) font l'intérêt de cet espace qui est un cas particulier d'exemples plus généraux à savoir les algèbres de Jordan [6] ou certains espaces préhomogènes [7].

Le groupe G admet une seule orbite ouverte qui est dense dans V à savoir

$$\Omega = \{g\,\mathrm{I}\,{}^tg \mid g \in G\} = \{X \in V \mid \det X \neq 0\}\ .$$

Comme le stabilisateur dans G de la matrice identité I est égal au groupe $H = O(n, \mathbb{C})$, l'ouvert Ω est homéomorphe à l'espace G/H qui est un espace symétrique réductif. En effet G est un groupe réductif c'est-à-dire égal au produit de son centre par un groupe semi-simple (ici $SL(n, \mathbb{C})$) et H est le sous-groupe des points fixes de l'involution σ de G donnée par $\sigma(g) = {}^t g^{-1}$ pour $g \in G$. Les problèmes posés par l'analyse harmonique des espaces de fonctions sur G/H sont exposés dans [1].

Nous allons tout d'abord examiner le cas des fonctions les plus simples sur V à savoir

1. Les fonctions polynomiales sur V

La représentation de G sur V induit une représentation de G sur l'espace $\mathcal{P}(V)$ des fonctions polynomiales sur V (c'est-à-dire des fonctions qui s'expriment comme des polynômes en les coefficients d'une matrice symétrique) donnée par

$$G \ni g \mapsto [\mathcal{P}(V) \ni P \mapsto g.P] \text{ où } (g.P)(X) = P({}^t gXg) \ (X \in V) \ .$$

Une question naturelle en théorie des représentations est la suivante :

Peut-on décomposer $\mathcal{P}(V)$ en somme directe de sous-espaces minimaux stables sous l'action de G ?

La restriction de la représentation de G à un tel sous-espace est dite irréductible.

Il est clair que les sous-espaces des polynômes homogènes (qui sont de dimension finie) sont stables sous l'action du groupe G. La théorie classique des représentations de dimension finie des groupes réductifs permet alors d'affirmer que la réponse est positive et d'écrire facilement la décomposition.

Pour cela on introduit les polynômes $V \ni X \mapsto \Delta_j(X)(j = 1, \ldots, n)$ qui sont les mineurs principaux de la matrice X, Δ_n étant le déterminant. Pour $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}^n$ on note Δ^ℓ le polynôme $\prod_{j=1}^n \Delta_j^{\ell_j}$ et on appelle $\mathcal{P}_\ell$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(V)$ engendré par les $g.\Delta^\ell$ pour $g \in G$. Le théorème ci-dessous est connu depuis longtemps. On peut en trouver une démonstration dans [6] p. 226 ou dans [7] p. 417.

Théorème 1. *L'espace $\mathcal{P}(V)$ se décompose en*

$$\mathcal{P}(V) = \oplus_{\ell \in \mathbb{N}^n} \mathcal{P}_\ell \ .$$

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^n$ l'espace $\mathcal{P}_\ell$ est stable sous l'action de G et la représentation de G sur cet espace est irréductible.

On montre aisément qu'on obtient ainsi presque toutes les représentations irréductibles de dimension finie de G admettant un vecteur H-invariant c'est-à-dire un élément $Q \in \mathcal{P}_\ell$ tel que $h.Q = Q$ pour tout $h \in H$. Ce polynôme Q est obtenu en intégrant sur le groupe compact $O(n)$ (pour la mesure de Haar) la famille des $h.\Delta^\ell$ $(h \in O(n))$.

Il est alors naturel de généraliser les fonctions Δ^ℓ à des puissances non entières. On considère donc

2. Les fonctions Δ_ℓ^s

Elles sont définies pour $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{Z}^n$ par

$$\Delta_\ell^s(X) = \prod_{j=1}^{n} |\Delta_j(X)|^{s_j} \times \left(\frac{\Delta_j(X)}{|\Delta_j(X)|}\right)^{\ell_j} \quad (X \in V) \ .$$

Bien entendu elles ne sont pas définies aux zéros des mineurs. Si $\mathrm{Re} s_j > 0$ pour $j = 1, \ldots, n$ on peut cependant les considérer comme des distributions tempérées c'est-à-dire considérer les applications qui à une fonction f appartenant à l'espace de Schwartz sur V $(f \in \mathcal{S}(V))$ associent

$$Z(f, s, \ell) = \int_V f(X)\Delta_\ell^s(X)\, dX \ .$$

Un résultat classique de [2] montre qu'on peut les prolonger méromorphiquement en s en des distributions encore tempérées. Une question naturelle est

Où se trouvent les singularités de ce prolongement méromorphe ?

Dans le cas où $n = 1$ $(V = \mathbb{C})$, $Z(f, s, \ell)$ est la fonction zêta locale (pour le corps $\mathbb{C}$) définie par Tate (Voir [9] pour comprendre la relation entre la fonction zêta classique et les fonctions zêta de Tate, dites locales, car associées aux corps locaux). Tate obtient une description des pôles en introduisant la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ et en démontrant la relation suivante :

$$Z(f, s, \ell) = \rho(s, \ell) Z(\mathcal{F}f, -s-2, -\ell) \ ,$$

où $\rho(s, \ell)$ est une fonction méromorphe dont on connaît explicitement les pôles car c'est un quotient de fonctions gammas. On peut alors conclure car $Z(f, s, \ell)$ est holomorphe pour $\mathrm{Re} s > -2$ et $Z(\mathcal{F}f, -s-2, -\ell)$ est holomorphe pour $\mathrm{Re} s < -1$.

Dans le cas où $n > 1$, nous avons obtenu une relation analogue ([3] p.724) :

Théorème 2. *Pour $f \in \mathcal{S}(V)$ on a*

$$Z(f, s, \ell) = \gamma(s, \ell) Z(\mathcal{F}^* f, v(s) - (n+1), v(\ell)) \ ,$$

où $v(s) = (s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots, s_1, -s_1 - \cdots - s_n)$, $s - m = (s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n - m)$, *où* $\gamma(s, \ell)$ *est une fonction méromorphe dont on connaît explicitement les pôles et où* $\mathcal{F}^*$ *est la transformation de Fourier ≪ tordue ≫ainsi*

$$[\mathcal{F}^* f](X) = [\mathcal{F} f](\gamma X \gamma) \text{ où } \gamma = \begin{pmatrix} 0 & .. & 0 & .. & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & .. & 0 & .. & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Ce résultat permet de déterminer les singularités dans certains domaines de $\mathbb{C}^n$ mais pas partout. Pour autant que je sache le problème est encore ouvert.

3. Intérêt des $Z(f, s, \ell)$ pour l'analyse harmonique de $L^2(G/H)$

On considère maintenant non plus la mesure dX qui est invariante par translations sur V mais la mesure $d^*X = \frac{dX}{|\Delta_n(X)|^{n+1}}$ qui , elle, est une mesure sur $\Omega \simeq G/H$ invariante sous l'action de G. L'action de G sur Ω induit, comme dans le cas des fonctions polynomiales, une représentation de G sur l'espace $L^2(G/H)$ des fonctions de carré intégrable (relativement à la mesure d^*X) sur G/H. Cette représentation est *unitaire* car $L^2(G/H)$ est muni naturellement d'une structure d'espace de Hilbert et tout élément de G est envoyé sur un opérateur unitaire de cet espace.

L'espace $L^2(G/H)$ se décompose cette fois non pas en somme mais en intégrale hilbertienne ([5]) d'une famille (paramétrée par un espace topologique Λ) de représentations irréductibles de G sur des espaces de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ ([1] p.73). Les résultats de Delorme, van den Ban et Schlichtkrull (voir [1]) décrivant cette décomposition (c'est ce qu'on appelle la formule de Plancherel sur G/H) impliquent qu'ici Λ est une partie de $\{(s, \ell) | s \in \mathbb{C}^n ; \ell \in \mathbb{Z}^n\}$. Ceci vient du fait que ces représentations admettent des vecteurs H-invariants qui à peu de choses près sont les distributions $Z(f, s, \ell)$.

On modifie cette fois la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ d'une fonction $f \in L^2(\Omega)$ en posant

$$(\widetilde{\mathcal{F}} f)(Y) = |\Delta_n(Y)|^{-\frac{n+1}{2}} \mathcal{F}\Big(|\Delta_n(X)|^{-\frac{n+1}{2}} f(X^{-1}) \Big) \text{ pour } Y \in \Omega \ .$$

On vérifie que l'opérateur $\widetilde{\mathcal{F}}$ est un opérateur unitaire sur $L^2(G/H)$ et commute à l'action de G. On sait que si un endomorphisme Γ a toutes ses valeurs propres distinctes, un endomorphisme F commutant avec Γ opère scalairement sur chacun des sous-espaces propres. On montre de même que $\widetilde{\mathcal{F}}$ opère scalairement sur chacun des espaces de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda (\lambda \in \Lambda)$. Si $c(\lambda)$ est le scalaire correspondant on déduit du théorème 2 le

Théorème 3. *Si λ correspond au paramètre (s, ℓ) alors*

$$c(\lambda) = \gamma(s, \ell) \ .$$

Remarque 1. – E.M. Stein ([8]) calcule les $c(\lambda)$ en utilisant la formule de Plancherel sur $GL(n, \mathbb{C})$ puis en déduit le théorème 2 alors que nous déduisons le théorème 3 (qui donne des informations sur l'analyse harmonique de G/H) du théorème 2.

Remarque 2. – On peut bien entendu tenter le même genre d'analyse pour les matrices symétriques réelles. La situation se complique car il y plusieurs orbites ouvertes qui sont homéomorphes respectivement aux espaces symétriques $GL(n, \mathbb{R})/O(p, q)$ pour $p+q = n$. Nous obtenons un résultat analogue au théorème 2 ([4]).

Bibliographie

[1] *E.van den Ban, M. Flensted-Jensen, H.Schlichtkrull*, Basic harmonic analysis on pseudo-riemannian symmetric spaces, in *Non compact Lie groups and some of their applications,* Kluwer Ac. Publ., (1994), 69-101.

[2] *I.N. Bernstein, S.I. Gelfand*, Mermorphic Properties of the P^λ, *Funct. Anal. Appl.*, **3**, (1969), 68-69.

[3] *N. Bopp, H. Rubenthaler*, Fonction zêta associée à la série principale sphérique de certains espaces symétriques, *Ann. Scient. de l'E.N.S*, **26**, (1993), 701-745.

[4] *N. Bopp, H. Rubenthaler*, Une fonction zêta associée à certaines familles d'espaces symétriques réels, *C.R.Acad.Sci. Paris*, **325**, (1997), 355-360.

[5] *J. Dixmier*, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien, *Gauthier-Villars, Paris*, (1969).

[6] *J. Faraut, A. Koranyi*, Analysis on Symmetric Cones, *Oxford Science Publ.*, (1994).

[7] *H. Rubenthaler, G. Schiffmann*, Opérateurs différentiels de Shimura et espaces préhomogènes, *Invent. Math.* **90**, (1987), 409-442.

[8] *E.M. Stein*, Analysis in matrix spaces and some new representations of $SL(n,\mathbb{C})$, *Ann. Math.* **86**, (1967), 461-490.

[9] *J.T. Tate*, Fourier analysis in number field theory and Hecke's zeta-function, in *Algebraic number theory (Cassels and Frőhlich editors), Acad. Press,* (1967), 305-347.

IRMA et Département de Mathématiques
Université Louis Pasteur
7 rue rené Descartes, 67084 Strasbourg Cedex
bopp@math.u-strasbg.fr