Groupes de Hecke et Surfaces Modulaires de Hilbert

Andrea Moreira

Considérons le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\,; \mathrm{Im}(z) > 0\}$, qui est un domaine simplement connexe. Une surface de Riemann est obtenue, par exemple, comme le quotient de $\mathbb{H}$ par un sous groupe Γ du groupe d'automorphismes de $\mathbb{H}$, à action discontinue sur $\mathbb{H}$.

Le groupe $GL^+(2,\mathbb{R})$ des matrices 2×2, à coefficients réels et à déterminant positif, agit sur $\mathbb{H}$ par applications fractionnaires :

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ z & \longmapsto & \gamma z = \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(t\gamma)z = \gamma z$, donc on peut identifier ces deux éléments γ et $t\gamma$ de $GL^+(2,\mathbb{R})$ et on a alors,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{\pm I\}$$

On peut prendre par exemple $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z}) \subset PSL(2,\mathbb{R})$ qui a une action discontinue sur $\mathbb{H}$.

Les groupes de Hecke

Définition : Un groupe triangulaire de signature (p,q,r), avec $p,q,r \geq 2$ et appartenant à $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, est un sous groupe de $SL(2,\mathbb{R})$, à trois générateurs $\{M_1, M_2, M_3\}$, dont l'image dans $PSL(2,\mathbb{R})$ est un groupe muni d'une présentation :

$$\{M_1^p = M_2^q = M_3^r = M_1 M_2 M_3 = 1\}.$$

Etant donnée une signature (p,q,r) vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, le groupe est déterminé à conjugaison dans $SL(2,\mathbb{R})$ près.

Par exemple, le groupe de signature $(3,2,\infty)$ est le groupe de Hecke correspondant à $SL(2,\mathbb{Z})$. Il est engendré par les matrices

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi considérer le groupe $\Delta = (5,2,\infty)$. Ce groupe est engendré par les matrices

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à ces deux exemples.

Le groupe $(3, 2, \infty)$ est arithmétique alors que Δ ne l'est pas. Pour la définition d'arithméticité d'un groupe, se référer par exemple à [**?**], mais on peut interpréter cette notion par le fait que si un groupe Δ_0 est arithmétique, ses orbites sur $\mathbb{H}$ sont en bijection avec une classe d'isomorphisme de variétés abéliennes, comme c'est le cas pour le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$, où l'espace quotient $PSL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ est en bijection avec les classes d'isomorphismes sur $\mathbb{C}$ des courbes elliptiques.

Si le groupe Δ n'est pas arithmétique alors, bien que les quotients $\Delta\backslash\mathbb{H}$ et $\Delta_0\backslash\mathbb{H}$ puissent etre les mêmes en tant qu'espaces, les orbites pour l'action de Δ sur $\mathbb{H}$ n'ont pas d'interprétation en termes de variétés abéliennes. Néanmoins, P. Cohen et J. Wolfart ont démontré dans [**?**], que dans le cas triangulaire hyperbolique (ex., les groupes de Hecke), et en particulier dans le cas de Δ, il existe un plongement, qui n'est pas trivial, de $\Delta\backslash\mathbb{H}$ dans $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$, où Γ est le groupe modulaire de Hilbert pour le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Le quotient de $\mathbb{H}^2$ par Γ est l'espace de modules de variétés abéliennes. De plus, ce plongement respecte les $\overline{\mathbb{Q}}$-structures des quotients.

Le groupe modulaire de Hilbert

Définition : Soient le corps de nombres quadratique $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ et O_K son anneau d'entiers ; $O_K = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\mathbb{Z}$. On note $\Gamma = SL(2, O_K)$ le groupe modulaire de Hilbert de K,

$$\Gamma = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in O_K, \det\gamma = 1 \right\}.$$

Le groupe Γ agit sur deux copies du demi-plan $\mathbb{H}$ de Poincaré de la manière suivante :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{H}\times\mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H}\times\mathbb{H} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & (\gamma z_1, \gamma' z_2) \end{array}$$

où γ' est l'image de γ par l'automorphisme de Galois non trivial de K dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x'$, donné par $\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$. C'est à dire si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

Le groupe Γ a une action discontinue sur $\mathbb{H}^2$ donc on peut considérer l'espace quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ qui a 1 pointe. On compactifie cet espace en rajoutant un point. On obtient une surface non-lisse $X_1 = \overline{\Gamma\backslash\mathbb{H}^2}$ appelée la surface modulaire de Hilbert pour $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ de niveau 1.

Il y a une manière naturelle de plonger $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ dans X_1. En effet, le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\Gamma = SL(2, O_K)$ et l'action de Γ sur $\mathbb{H}^2$ induit une action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}^2$. De plus, on peut plonger $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}^2$ par le plongement diagonal $z \mapsto (z, z)$. Ce plongement et clairement compatible aux actions respectives de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}^2$. On peut donc passer aux quotients et en déduire un morphisme (en fait un plongement) de $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ dans $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$. Ce plongement préserve les $\overline{\mathbb{Q}}$-structures de ces quotients.

De même, Δ est un sous-groupe de $\Gamma = SL(2, O_K)$ et il existe, d'après [**?**], un plongement de $\Delta\backslash\mathbb{H}$ dans X_1. Bien sûr, il n'est plus induit par le plongement diagonal et il est nettement plus compliqué à décrire.

Considérons maintenant le groupe

$$\Gamma[2] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv 1 \; mod(2O_K) \right\},$$

appelé sous groupe principal de congruence de niveau 2 de Γ. Le quotient $\Gamma/\Gamma[2]$ est isomorphe au groupe alterné A_5, par conséquent la surface $X_2 = \Gamma[2]\backslash\mathbb{H}^2$ est munie d'une action naturelle de A_5 et possède 5 pointes. En résolvant ces 5 singularités de X_2, on obtient une surface complexe lisse Y_2. Hirzebruch a démontré (voir Theorem 1 de [**?**]), que Y_2 est isomorphe en tant que surface complexe à une surface Y provenant d'un éclatement de la surface de Klein.

La surface de l'icosaèdre de Klein

Soit I l'icosaèdre de $\mathbb{R}^3$ inscrit dans la sphère S^2. En projettant de l'origine sur la surface de S^2, les 12 sommets déterminent 12 points sur S^2, les 30 arêtes 15 grands cercles et les milieux des faces 20 points. L'identification antipodale $S^2 \mapsto S^2/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ identifie

$$\begin{array}{rcl} \text{12 points} & \longleftrightarrow & \text{6 points dans } \mathbb{P}_2 \text{ : les pôles} \\ \text{15 cercles} & \longleftrightarrow & \text{15 droites projectives dans } \mathbb{P}_2 \text{ : les droites} \\ \text{20 points des faces} & \longleftrightarrow & \text{10 points dans } \mathbb{P}_2 \text{ : les points} \end{array}$$

On complexifie $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et on éclate les 6 pôles. On obtient une surface appelée la surface de l'icosaèdre de Klein. Elle a une description équivalente due à Clebsch comme surface dans $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$:

$$\left\{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}_4(\mathbb{C}); \sum_{j=0}^{4} x_j = \sum_{j=0}^{4} {x_j}^3 = 0 \right\}$$

avec 27 droites. On peut voir un modèle réel de cette surface dans [**?**], par exemple.

Si l'on éclate maintenant les transformés des 10 points, on obtient une surface complexe lisse $Y \simeq Y_2$.

La résolution de chaque pointe de X_2 est donné sur Y_2 par un cycle de 3 courbes de self-intersection -3 et on retrouve ainsi les 15 transformés propres sur Y des 15 droites de la surface de Klein provenant des 15 cercles.

Le quotient de $SL_2(\mathbb{Z})$ par son sous-groupe de congruence principal de niveau 2 est d'ordre 6, donc l'image de $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ dans $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ a une orbite de cardinalité 10 sous l'action de A_5. Cette orbite correspond aux 10 diviseurs exceptionnels sur la surface Y provenant des 10 points éclatés sur la surface de Klein.

Nous avons donc une description "automorphe" de 15 des 27 droites de la surface de Clebsch ainsi que des 10 points éclatés. Mais il reste 12 droites de la surface de Clebsch à décrire, si possible, de cette façon. Dans [**?**], Thomas Schmidt résout ce problème en considérant le groupe de Hecke Δ, de signature $(2, 5, \infty)$.

L'image de $\Delta\backslash\mathbb{H}$ dans $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ a une orbite de cardinalité 6 sous l'action de A_5. T. Schmidt a démontré dans [**?**] que cette orbite correspond à six diviseurs sur la surface Y qui ne sont ni les transformés des 15 droites des configurations triangulaires, ni les 10 diviseurs provenant des 10 points éclatés sur la surface de Clebsch. De plus, l'action de Δ sur $\mathbb{H}^2$ n'est pas diagonale donc l'automorphisme $\tau : (z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$ agit de manière non triviale sur les 6 orbites qui se trouvent dans X_2, donnant lieu à 6 autres diviseurs. Ces 12 diviseurs ainsi obtenus sont les transformés propres des 12 droites restantes de la surface de Clebsch, c'est-à-dire les 6 diviseurs exceptionnels provenant des 6 pôles éclatés et les transformés des 6 coniques qui passent chacune par 5 des 6 pôles.

Références

[1] *P. Cohen, J. Wolfart*, Modular embeddings for some non-arithmetic Fuchsian groups. Acta Arith. **LVI**, (1990), 93–110.

[2] *F. Hirzebruch*, Regular Polyhedra and the football. Polycopié d'un exposé fait à Tokyo

[3] *F. Hirzebruch*, Hilbert's modular group of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ and the cubic diagonal surface of Clebsch and Klein. Russian Math. Surveys **31** :5, (1976), 96–110.

[4] *T. Schmidt*, Klein's Cubic Surface and a "non-arithmetic" curve. Math. Ann. **309**, No.4 (1997), 533–539.

[5] *K. Takeuchi*, A characterisation of arithmetic Fuchsian groups. J. Math. Soc. Japan **27**, No.4 (1975), 600–612.

[6] *K. Takeuchi*, Arithmetic triangle groups. J. Math. Soc. Japan **29**, (1977), 91–106.

Andrea Moreira
Université Lille 1
Bâtiment M2 (212)
USTL, Cité Scientifique
59 655 Villeneuve d'Ascq
France
`moreira@gat.univ-lille1.fr`