Problèmes de Contrôle Optimal Parabolique avec Contraintes sur le Contrôle.

Nora Merabet

Introduction et hypothèses

On propose d'étudier la stabilité et la sensibilité d'un problème de contrôle optimal gouverné par une équation parabolique semi-linéaire, avec des contraintes sur le contrôle.
On considère un système dont l'état y est donné par

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t y + Ay + f(y) & = & u & \text{in } Q \\ y & = & 0 & \text{on } \Sigma \\ y(0) & = & g & \text{in } \Omega\ , \end{array}\right. \tag{3.4}$$

et un problème de contrôle optimal (g étant fixé , $g = 0$)

$$(\mathcal{P}_\tau) \qquad \left\{\begin{array}{l} \min J_\tau(u,y) := \frac{1}{2}\int_Q (y-\tau)^2\, dx\, dt \ + \frac{N}{2}\int_Q u^2\, dx\, dt \\ y = y(u) \text{ solution de } (\textbf{??}) \\ u \in \mathcal{K}\ , \end{array}\right.$$

où $N > 0$, $\tau \in L^p(Q)$ et $\mathcal{K}$ un convexe fermé borné dans $L^p(Q)$. Ce genre de problème $(\mathcal{P}_\tau)$ a au moins une solution $u^*(\tau)$. Nous aimerions décrire la sensibilité locale de $u^*(\tau)$ par rapport à τ ainsi que le comportement de la fonction valeur optimale $\tau \mapsto J(u^*(\tau), y(u^*(\tau)))$. Sous des conditions d'optimalité du second ordre, nous donnerons un résultat de stabilité du contrôle par rapport au paramètre et en plus d'une hypothèse de polyédricité de $\mathcal{K}$ (notion définie dans [**?**]) on établit un développement local du second ordre de la fonction valeur optimale au voisinage d'une valeur fixée $\bar{\tau}$. La plus part des techniques utilisées sont dûes à J.F. Bonnans [**?**] qui a étudié la question dans le cadre elliptique pour le même type de perturbation convexe. Par ailleurs, nous avons étudié le cas plus général d'une perturbation nonlinéaire (où la donnée initiale g mal connue dans l'équation d'état est considérée comme un paramètre). Ce que nous n'aborderons pas ici.

Précisons les hypothèses :
— **(H1)** A est un opérateur différentiel elliptique du second ordre défini

par

$$
\begin{gathered}
Ay = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}y) + a_o(x)y \text{ avec} \\
a_{ij} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}),\ i,j = 1 \cdots N, \\
a_o \in L^\infty(\Omega), \text{Infess } \{a_o(x) \ \mid \ x \in \overline{\Omega}\} \geq 0. \\
\forall x \in \overline{\Omega}, \forall \xi \in R^N, \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq M \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \text{ with } M > 0\ .
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

— **(H2)** f est une fonction réelle $\mathcal{C}^2$ de R dans R, non croissante et globalement lipschitzienne continue. On note similairement la fonction f et l'opérateur de Nemytskii $f : y \mapsto f(y)$ tel que $f(y)(x,t) = f(y(x,t)),\ (x,t) \in Q$.

Propriétés de l'équation d'état :
(i) On suppose (H1) et (H2). Pour tout $u \in L^p(Q)$ et $g \in W_o^{1,p}(\Omega)$ avec $p > N$, l'équation (**??**) admet une unique solution $y = y(u,g) \in W_2(0,T) \cap \mathcal{C}(\overline{Q})$.
(ii) Continuité de la fonction d'état par rapport aux données
Pour tout $u \in L^p(Q)$ et tout $g \in W_o^{1,p}(\Omega)$, il existe $C > 0$ tel que

$$
\|y\|_{\infty,Q} \leq C\,(\|u\|_{p,Q} + \|g\|_{\infty,\Omega} + 1), \tag{3.6}
$$

D'autre part y est continue Hölder sur $\overline{Q}$: pour tout $M > 0$, il existe une constante C et $\nu > 0$ telles

$$
\|u\|_{q,Q} + \|g\|_{\infty,\Omega} \leq M \Longrightarrow \|y\|_{C^{\nu,\nu/2}(\overline{Q})} \leq C.
$$

Preuve (voir [**?**]).
Théorème L'application $(u,g) \mapsto y(u,g)$ est séquentiellement continue
i) de $L^p(\Omega) \times W_o^{1,p}(\Omega)$ muni de la topologie faible-$L^p(Q)\times$ faible-étoile $L^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\overline{Q})$ (fort).
(ii) de $L^p(\Omega) \times W_o^{1,p}(\Omega)$ muni de la topologie faible dans $\mathcal{C}(\overline{Q})$ fort et dans $L^2(Q)$ fort.
Preuve Voir ([**?**]). Cette propriété de la fonction d'état est cruciale dans la suite.
On définit l'espace d'état

$$
\mathcal{Y} = \{y \in W_p(0,T) \ \mid \ \partial_t y + Ay \in L^p(Q), y = 0 \text{ sur } \Sigma, y(0) \in W_o^{1,p}(\Omega)\}\ .
$$

$\mathcal{Y}$ est un sous-espace de $\mathcal{C}(\overline{Q})$, et muni de la norme

$$\|y\|_{\mathcal{Y}} = \|y\|_{W_p(0,T)} + \|y\|_{\mathcal{C}(\overline{Q})} + \|y_t + Ay\|_{L^p(Q)} + \|y(0)\|_{W_o^{1,p}(\Omega)} \ ,$$

c'est un espace de Banach.
Si nous écrivons l'équation d'état sous forme d'opérateur $\mathcal{T}$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} : L^p(Q) \times \mathcal{Y} & \to & L^p(Q) \times W_0^{1,p}(\Omega) \\ (u, y) & \longmapsto & (\partial_t y + Ay + f(y) - u, y(0)), \end{array}$$

alors le théorème des fonctions implicites nous dit que l'équation $\mathcal{T}(u, y) = 0$ admet une solution unique en $y := y(u)$ pour tout $u \in L^p(Q)$. En remplaçant dans l'expression de la fonction coût, $(\mathcal{P}_\tau)$ se formule ainsi :

$$(\mathcal{P}_\tau) \quad \begin{cases} \min F(u, \tau) := & J_\tau(u, y(u)) \\ u \in \mathcal{K} \end{cases}$$

Propriétés de la fonction coût :(i) F est de classe $\mathcal{C}^2$ de $L^p(Q)$ dans R et

$$F'_u(u, \tau)v = (Nu + p(u), v)_{2,Q} \tag{3.7}$$

$$F''_u(u, \tau)(v, v) = ((1 - p(u)f''(y(u)))z_v, z_v)_{2,Q} + N\|v\|^2_{2,Q}. \tag{3.8}$$

où $p(u)$ est l'état adjoint associé à y et $z_v = Dy(u)v$.
(ii) F est séquentiellement faiblement continue sur $L^p(Q)$.

La condition d'optimalité suffisante du second ordre faible
(au sens de la norme L^2) est satisafaite en u si

— u satisfait au système d'optimalité du premier ordre

$$\forall v \in \mathcal{K}, \quad (F'_\tau(u_\tau), v - u_\tau) \geq 0 \ . \tag{3.9}$$

— et si

$$\exists \nu > 0 \ , \ \forall v \in C_2(u) \ , \ F''_\tau(u)(v, v) \geq \nu\|v\|^2_2, \tag{3.10}$$

où $C_2(u)$ est le cône critique dans $L^2(Q)$

$$C_2(u) = \{v \in L^2(Q); \ F'_\tau(u)v = 0, \ u + \delta v + o(\delta) \in \mathcal{K}, \ \delta > 0 \ \}$$

Le problème quadratique associé à $(\mathcal{P}_\tau)$:
Une autre approche de la théorie des conditions d'optimalité du second ordre

associe à chaque point admissible u de $(\mathcal{P}_\tau)$ un problème quadratique $(\mathcal{Q}_{u,\tau,\eta})$ qui est à la base du résultat de sensibilité. Pour tout η fixé dans $L^2(Q)$:

$$(\mathcal{Q}_{u,\tau,\eta}) \qquad \begin{cases} \min \ F''(u,\tau)((v,\eta),(v,\eta)) \\ v \in \mathcal{C}_2(u) \end{cases}$$

Résultat de stabilité et de sensibilité

On notera $\mathcal{V}(\tau)$ (resp. $\mathsf{V}(\mathcal{Q}_{u,\tau,\eta})$) la fonction valeur optimale de $(\mathcal{P}_\tau)$ (resp.$(\mathcal{Q}_{u,\tau,\eta})$) :

Théorème : (i)Soit τ_k une suite de $L^p(Q)$ fortement convergente vers $\bar{\tau}$ dans $L^2(Q)$ et u_k solution de $(\mathcal{P}_{\tau_k})$. Alors, il existe $\bar{u}$ solution de $(\mathcal{P}_{\bar{\tau}})$ tel que u_k converge vers $\bar{u}$ faiblement dans $L^p(Q)$ et fortement dans $L^2(Q)$.

Si de plus $\bar{u}$ vérifie (**??**) alors

$$\|u_k - \bar{u}\|_{2,Q} = O(\|\tau_k - \bar{\tau}\|_{2,Q}). \tag{3.11}$$

Supposons que $\mathcal{K}$ est $L^2(Q)$-polyédrique.

(ii) Soit $\tau_k = \bar{\tau} + t_k\eta$, avec $\eta \in L^p(Q)$. Si $\bar{u}$ vérifie (**??**) alors on a le développement du second ordre de la fonction valeur optimale (à une sous-suite près)

$$\mathcal{V}(\tau_k) = \mathcal{V}(\bar{\tau}) + t_k F'_\tau(\bar{u},\bar{\tau})\eta + t_k^2\,\mathsf{V}(\mathcal{Q}_{\bar{u},\bar{\tau},\eta}) + o(t_k^2)\ .$$

(iii) Si v est une limite au sens faible de $\dfrac{u_k - \bar{u}}{t_k}$ dans $L^2(Q)$ alors v est une limite au sens fort de $\dfrac{u_k - \bar{u}}{t_k}$ dans $L^2(Q)$ et v est solution de $\mathsf{V}(\mathcal{Q}_{\bar{u},\bar{\tau},\eta})$.

preuve

La preuve se base essentiellement sur une méthode des sous et sur estimations des fonctions valeurs optimales sur la régularité de la fonction d'état et sur le lemme suivant qui permet d'écrire le développement de la fonction valeur optimale avec un reste dans $L^2(Q)$ pour des fonctions tests dans $L^p(Q)$.

lemme Soit $r(u,v)$ le reste dans le dévelopement du second ordre de la fonction coût F, c'est à dire

$$F(u+v) = F(u) + F'(u)v + \frac{1}{2}F''(u)(v,v) + r(u,v).$$

Quand $v \to 0$ dans $L^2(Q)$, et v appartient à un ensemble borné dans $L^p(Q)$, avec $p > \frac{N}{2}$, on obtient $\dfrac{|r(u,v)|}{\|v\|_2^2} \to 0$.

Références

[1] **N. Arada, M. Bergounioux and J.P Raymond**, *Minimax controls for uncertain distributed parabolic systems*, to appear SIAM Journal on Control and Optimization.

[2] **M. Bergounioux and H. Zidani**, *Pontryagin Maximum Principle For Optimal Control of Variational Inequalities*, SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 37, n° 4, pp. 1273-1290, 1999.

[3] **J.F. Bonnans**, *Second order analysis for control constrained optimal control problems of semilinear elliptic systems*, Applied Mathematics and Optimization, 38, pp. 303-325, 1998.

[4] **J.F. Bonnans- R. Cominetti**, *Perturbed optimization in Banach spaces I : a general theory based on a strong directional constraint qualification*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 34, n° 4, pp 1172-1189, 1996.

[5] **R. Dautray - J.L. Lions**, *Analyse mathématique and calcul numérique pour les sciences et les techniques. Evolution : semi-groupe, variationnel*, Tome 8, Masson, 1984.

Nora Merabet
Département de Mathématiques
UMR 6628 - MAMPO - Université d'Orléans
B.P. 6759 - 45067 Orléans Cedex 2
France
Nora.Merabet@labomath.univ-orleans.fr