Drap brownien fractionnaire

Stéphanie Léger

Le but de mes recherches est de trouver un ou plusieurs paramètres permettant de savoir si une personne a de l'ostéoporose ou non.

L'ostéoporose est une maladie qui touche surtout les femmes et qui se traduit par une augmentation du caractère poreux de l'os et donc de sa fragilité. L'ostéoporose se révèle tardivement car les douleurs n'apparaissent habituellement qu'à l'occasion de complications comme la fracture du col du fémur (Dans la plupart des cas, on dit qu'une personne est tombée et s'est cassée le col du fémur alors qu'en fait, le col s'est cassé et elle est tombée).

A l'heure actuelle, il existe des méthodes qui permettent de dépister l'ostéoporose (absorptiométrie photonique, absorptiométrie bi-photonique, études histomorphométriques, ...) mais elles sont très couteuses.

La recherche de nouvelles techniques fiables et d'un prix réduit est actuellement un des axes de recherche dans ce domaine.

Comme l'ostéoporose se reconnait à la radiographie par une hypertransparence diffuse de l'os ou par un amincissement des travées osseuses, la numérisation de clichés radiographiques et leur étude par des méthodes d'analyse d'images peuvent s'avérer un bon moyen d'obtenir des paramètres quantitatifs.

Nous sommes donc en possession de radiographies du Calcaneum (os du talon).

Nous avons testé sur ces images tous les paramètres classiques de l'analyse de textures d'images grâce à un logiciel créé par l'INRIA : Arthur. Aucun de ces paramètres ne nous a permis de séparer les malades des sains. Il a donc fallu s'orienter vers de nouvelles téchniques. Une équipe de chercheurs d'Orléans (LESI) a montré l'intérèt d'un modèle fractal pour l'analyse d'images et a appliqués une méthode d'analyse fractale orientée (estimation du paramètre H du mouvement brownien fractionnaire ([**?**])) sur les radiographies d'os ([**?**]).
L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne considère pas l'image dans son ensemble mais ligne par ligne. Nous avons donc décidé de définir une extension du mouvement brownien fractionnaire à la dimension 2 pour étudier l'image dans sa globalité.

Maintenant que le cadre est défini, nous allons faire quelques rappels avant de passer à la définition du drap brownien fractionnaire.

Toutes les définitions de bases proviennent de [**?**].
Définition : Le drap brownien est un champ gaussien centré $\{B_{s,t}; (s,t) \in \Re^2\}$ dont la matrice des covariances est :

$$\forall\ (s_1,t_1),(s_2,t_2) \in \Re^2\ E(B_{s_1,t_1}B_{s_2,t_2}) = \inf(s_1,s_2) \times \inf(t_1,t_2). \tag{3.3}$$

Considérons maintenant une fonction $\Phi \in L^2(\Re^2)$. Alors, l'intégrale stochastique de ϕ par rapport au drap brownien fractionnaire s'écrit $Y = \int \phi(s,t)dB_{s,t}$. La propriété principale que nous allons utiliser est que Y est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\int\int \phi^2(s,t)dsdt$.

Définition : On appelle Drap Brownien fractionnaire le champ $W_{\alpha,\beta}$ défini par :$\forall(s,t) \in (\Re^+)^2$

$$W_{\alpha,\beta}(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [(s-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}}][(t-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} - (-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}}]dB_{u,v}$$

où, $(x)_+$ représente la partie positive de x et (α,β) sont deux paramètres réels à préciser pour que ces 4 intégrales aient un sens.

Ce processus est une généralisation du mouvement brownien fractionnaire de Mandelbrot et Van Ness ([**?**]) aux champs aléatoires définis comme double intégrale fractionnaire d'un drap brownien. Posons :
$f_\alpha(s,u) = (s-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}}$ et $f_\beta(t,v) = (t-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} - (-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}}$.

On peut remarquer que ce sont les intégrands d'un mouvement brownien fractionnaire classique (aux constantes près) de paramètres respectifs α et β. Alors :

$$W_{\alpha,\beta}(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(s,u)f_\beta(t,v)dB_{u,v}$$

Proposition : Si α et $\beta \in]0,1[$, alors $W_{\alpha,\beta}$ est bien défini.
Preuve : Pour que $W_{\alpha,\beta}$ existe, il faut que les intégrales fractionnaires utilisées soient bien définies. Cela est vérifié dès que l'intégrand appartient à L^2.
Proposition : Le champ $W_{\alpha,\beta}$ est un champ aléatoire gaussien centré nul sur les axes.

On définit, comme cela est classique pour les processus à double indice, les accroissements ¡¡rectangle¿¿ du processus $W_{\alpha,\beta}$:
$W(](s,t),(s+h_i,t+k_i)[)$
$= W_{\alpha,\beta}(s+h_i,t+k_i) - W_{\alpha,\beta}(s+h_i,t) - W_{\alpha,\beta}(s,t+k_i) + W_{\alpha,\beta}(s,t)$
notés par la suite $A_{(s,t)}W(h_i,k_i)$.

Definition : Un processus $X = (X_t, t \in T)$ est stationnaire si :
$\forall n,\ \ \forall (t_1, \cdots, t_n) \in T^n$ la loi de $(X_{t+t_1}, X_{t+t_2}, ..., X_{t+t_n})$ ne dépend pas de t.
Proposition : Le processus $W_{\alpha,\beta}(s,t)$ est à accroissements stationnaires.
Preuve : Il faut donc montrer que pour tout $(s,t) \in (\Re^+)^2$, le processus accroissements $\{A_{(s,t)}W(h_i,k_i)\}_{(h_i,k_i)\in(\Re^+)^2}$ est de même loi que le processus $\{A_{(0,0)}W(h_i,k_i)\}_{(h_i,k_i)\in(\Re^+)^2}$.

On notera désormais $A_{\alpha,\beta}W(h,k)$ un tel accroissement qui vérifie le corollaire suivant :
Corollaire : Le processus ¡¡accroissement¿¿ $A_{\alpha,\beta}W$ est un champ aléatoire gaussien centré de matrice de covariance :

$$\frac{1}{4}C_\alpha C_\beta(|h_i|^{2\alpha} + |h_j|^{2\alpha} - |h_i - h_j|^{2\alpha})(|k_i|^{2\beta} + |k_j|^{2\beta} - |k_i - k_j|^{2\beta})$$

.
Proposition Le processus $W_{\alpha,\beta}$ est statistiquement auto-similaire dans le sens où :
si $\forall h, k \in \Re_*^+$, le processus $\hat{W}_{\alpha,\beta}$ défini par

$$\hat{W}_{\alpha,\beta}(s,t) = h^\alpha k^\beta W_{\alpha,\beta}(\frac{s}{h}, \frac{t}{k}),$$

est de même loi que $W_{\alpha,\beta}$.
Preuve : Il est évident que $\hat{W}_{\alpha,\beta}$ est un champs gaussien. Donc, pour montrer que les deux champs aléatoires ont la même loi, il suffit de montrer qu'ils ont la même moyenne et la même matrice de covariance.

Nous allons maintenant nous intéresser à la continuité des trajectoires.
Proposition Si α et $\beta \in]0,1[$, $W_{\alpha,\beta}$ admet une modification dont les trajectoires sont continues sur $\Re^2$ au sens de Hölder à l'ordre (α', β'), $\forall \alpha' \in]0, \alpha[,\ \ \beta' \in]0, \beta[$.

L'un des objectifs futurs concernant le drap-brownien est bien sûr l'estimation des paramètres α et β et la simulation du processus. Dans cette optique, nous nous sommes intéressées à la régularité de W par rapport aux paramètres α et β.

Nous montrons que le drap brownien fractionnaire est continu en (α, β) dans le sens suivant :
Théorème : Soit $W_{\alpha,\beta}$, le processus défini en (**??**) avec $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ et le compact de $\Re^6$

$$T_h = [0, L] \times [0, K] \times \{\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in [a, b]^2 \times [c, d]^2 / |\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'| \leq h\}$$

défini pour $[a,b] \times [c,d] \in (0,1)^2$ et $L, K > 0$. On pose

$$A_h = \sup_{(s,t,\alpha,\alpha',\beta,\beta') \in T_h} |W_{\alpha,\beta}(s,t) - W_{\alpha',\beta'}(s,t)|.$$

Alors, A_h converge presque sûrement vers 0 lorsque h tend vers 0. Plus précisement, on obtient qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\delta < 1$, presque sûrement :

$$\limsup_{h \to 0} \frac{A_h - Ch}{h^\delta} \leq \varepsilon.$$

Références

[1] R.J. Adler, The Geometry of Random Fields, John Wiley and Sons, 1981.

[2] Z. Ciesielski, A. Kamont, "Levy's fractional Brownian random field and function spaces", Acta Sci. Math., 60, 99-118, 1995.

[3] D. Feyel, A. De La Pradelle, "Fractional integrals and Brownian processes", Preprint université d'Evry, 1996.

[4] R. Jennane, Modélisation Fractale de Textures, Application à l'Analyse de l'Architecture Osseuse. Thèse de Troisième Cycle, Université d'Orléans, 1995.

[5] A. Kamont, "On the fractionnal anisotropic wiener field", Prob. and Math. Stat., vol. 16, fasc. 1, 85-98, 1996

[6] I. Karatzas, S. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, 1988.

[7] J. Levy-Vehel, R.F. Peltier, "Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results", rapport de recherche INRIA 2645, Août 1995 ; à paraître dans Stoc. Proc. and their appli. .

[8] T. Lindstrom, "Fractional Brownian fields as integrals of white noise", Bull. London Math. Soc., 25 ,83-88, 1993.

[9] B.B. Mandelbrot, J.W. Van Ness, "Fractional Brownian motion , Fractional noises and applications", SIAM Review 10, 422-437, 1968.

[10] Samorodnisky, Taqqu, Stable non-Gaussian Random Processes, Chapman and hall, 1994.

[11] E. Wong et M. Zakai, Martingales and Stochastics Integrals for Processes with a Multi-Dimensional Parameter, Zeit. Wahrsch., 29, 109-122, 1974.

Stéphanie Léger
MAPMO
Département de Mathématiques
BP 6759
45067 ORLEANS CEDEX 2
France
leger@labomath.univ-orleans.fr.fr