Traces au bord d'un ouvert de solutions d'équations elliptiques

Michèle Grillot

On considère un ouvert Ω borné régulier de $I\!R^N$, $N \geq 2$, f une application réelle à valeurs réelles que l'on précisera dans la suite et le problème auquel on s'intéresse est le suivant : étant donnée une solution $u \in C^2(\Omega)$ de $\Delta u = f(u)$ dans Ω (où $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$), peut-on définir une trace de u au bord $\partial\Omega$?

Remarque : si u est dans un espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, alors la trace de u est bien définie.

L'un des premiers résultats est le suivant, dû à Fatou :

Théorème 1 *Soit B la boule unité de $I\!R^N$, $N \geq 2$. Soit $u \in C^2(B)$ harmonique et positive dans B.*

(i) $\forall x_0 \in \partial B$:

$$\lim_{x \to x_0, x \in C_0} u(x) \quad \textit{existe pp.}$$

où C_0 est un cône centré en x_0.

(ii) De plus, il existe une mesure de Radon μ sur ∂B, positive telle que

$$u(r,.) \to \mu \quad \textit{faiblement quand} \quad r \to 1$$

où $x = (r, \sigma) \in (0,1) \times S^{N-1}$ en coordonnées sphériques.

Doob a étendu ce résultat à des fonctions surharmoniques. La définition de trace de solutions d'équations aux dérivées partielles est un vaste domaine et a fait l'objet de nombreux travaux.

Les problèmes de trace au bord pour des solutions d'équations elliptiques semi-linéaires a été initié par L. Véron et M. Marcus. Ils se sont intéressés à une non-linéarité de type puissance en considérant des solutions positives de l'équation $-\Delta u + u^q = 0$ dans la boule unité de $I\!R^N$.

En collaboration avec L. Véron, j'ai travaillé sur la caractérisation de trace au bord de la boule unité ouverte B de $I\!R^N$, de solutions de l'équation à courbure moyenne prescrite

$$\Delta u + Ke^{2u} = 0 \quad \text{dans} \quad B \tag{3.1}$$

où K est une fonction continue de $\overline{B}$. C'est une extension naturelle du problème avec la non-linéarité de type puissance.

Nous définissons les ensembles ω^+, ω^- et ω^0 par $\omega^+ = \{\theta \in \partial B \ / \ K(\theta) > 0\}$, $\omega^- = \{\theta \in \partial B \ / \ K(\theta) < 0\}$ et $\omega^0 = \{\theta \in \partial B \ / \ K(\theta) = 0\}$ et nous définissons la trace au bord d'une solution minorée de (**??**). Notre principal résultat est le suivant :

Théorème 2 *Soit u une solution minorée de l'équation (**??**) dans B. Alors pour tout $\theta \in \partial B$, on a l'alternative suivante :*
I. Si $\theta \in \omega^-$
i) ou bien pour tout voisinage U de θ dans ∂B

$$\lim_{r \to 1} \int_U u(r, \sigma)\, d\sigma = \infty\,,$$

ii) ou bien il existe un voisinage ouvert U de θ dans ∂B et une fonctionnelle linéaire l_U sur $C_0(U)$ tels que

$$\lim_{r \to 1} \int_R u(r, \sigma)\zeta(\sigma) d\sigma = l_U(\zeta) \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(U)\ . \tag{3.2}$$

*II. Si $\theta \in \omega^+$, il existe un voisinage ouvert U de θ dans ∂B et une fonctionnelle linéaire l_U sur $C_0(U)$ tels qu'on ait (**??**).*

L'ensemble $\mathcal{R}$ des éléments $\theta \in \partial B$ tels que l'on ait I.ii) ou II. est ouvert et il existe une unique mesure de Radon μ sur $\mathcal{R}$ telle que

$$\lim_{r \to 1} \int_{\mathcal{R}} u(r, \sigma)\zeta(\sigma)\, d\sigma = \int_{\mathcal{R}} \zeta d\mu \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(U)\ .$$

On définit alors la trace au bord d'une solution minorée de $\Delta u + Ke^{2u} = 0$ dans B par le triplet $(\mathcal{S}, \mu, \omega^0)$ où $\mathcal{S} = \partial B \setminus \mathcal{R}$.

D'autre part, dans le cas où K est une fonction strictement négative dans $\overline{B}$, nous définissons des mesures de Radon admissibles, c'est à dire des mesures de Radon dont la partie régulière et le noyau de Poisson de la partie singulière vérifient des conditions d'intégrabilité, et nous montrons qu'étant donnée une mesure μ de Radon admissible, il existe une unique solution du problème $\Delta u + Ke^{2u} = 0$ dans B et $u = \mu$ sur ∂B.

Comme dans le travail de M. Marcus et L. Véron [?], nous étendons ce résultat d'existence aux mesures de Borel en donnant une condition suffisante pour qu'un couple $(\mathcal{S}, \mu)$ représente la trace au bord d'une solution de l'équation.

Enfin, nous caractérisons, en terme de capacité, les ensembles éliminables du bord pour cette équation.

Ce travail fait l'objet d'un article à paraître dans Proc. Roy. Soc. Ed. [?].

Références

[1] M. Grillot and L. Véron : Boundary trace of the solutions of the prescribed Gaussian curvature equation, **Proc. Roy. Soc. Ed.**,(à paraître).

[2] M. Marcus and L. Véron : The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations : the supercritical case, **J. Math. Pures Appl. 77**, 481-524 (1998).

Michèle Grillot
MAPMO
Université d'Orléans
BP 6759
45 067 Orléans Cedex 02
France
grillot@labomath.univ-orleans.fr