Introduction à la quantification des variétés orbitales [1]

Elise Benlolo et Yasmine Sanderson

1. Rappels de quelques définitions et propriétés

Toutes les définitions et notions qui suivent sont formulées de façon à faciliter la compréhension de cet exposé. Des formulations plus précises se trouvent dans [3] et [4], par exemple.

Une $\mathbb{C}$-*algèbre de Lie* est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un crochet anti-symétrique $[,]$ qui vérifie l'identité de Jacobi : pour tous X, Y et Z de cet espace vectoriel,

$$[X,\ [Y,\ Z]] + [Y,\ [Z,\ X]] + [Z,\ [X,\ Y]] = 0.$$

Exemple : dans $gl_n(\mathbb{C})$, i.e. le $\mathbb{C}$-espace des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{C}$, le crochet de Lie est : $\forall A, B \in gl_n(\mathbb{C})$, $[A, B] = AB - BA$. *Un groupe algébrique* est un groupe muni d'une structure de variété algébrique. Nous ne définirons cette notion que dans le cas particuher des variétés affines. Quand on ignore la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, on appelle $\mathbb{C}^n$ le $\mathbb{C}$-*espace affine de dimension* n. Tout sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ défini par un nombre fini d'équations polynômiales est appelé *variété affine*. Les variétés affines constituent les fermés de $\mathbb{C}^n$ pour la *topologie de Zariski*. Soit $GL_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{C}$ inversibles. On peut regarder ce groupe comme une variété affine. En effet, on peut l'identifier à l'ensemble $\{(a_{11}, \dots,\ a_{nn},\ b) \in \mathbb{C}^{n^2+1} ;\ b det(a_{ij}) = 1\}$. Donc $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe algébrique. Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{C})$ est appelé *groupe linéaire algébrique*. Il y a un lien étroit entre les groupes linéaires algébriques et les algèbres de Lie : si G est un groupe linéaire algébrique, on peut lui associer une algèbre de Lie (de même dimension), *Lie* (G) , en munissant 1'espace tangent de G en l'identité de G d'une structure d'algèbre de Lie.

Exemples :

- Si $G = GL_n(\mathbb{C})$ alors *Lie* $(G) = gl_n(\mathbb{C})$,
- Si $G = SL_n(\mathbb{C})$ (i.e. le groupe des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{C}$ de déterminant égal à 1), alors $Lie(G) = sl_n(\mathbb{C})$ (i.e. l'algèbre des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{C}$ de trace nulle). Dans la suite, nous considérerons essentiellement le cas de $G = SL_n(\mathbb{C})$. Nous noterons $\underline{g} = Lie(G)$.

2. Variétés orbitales : définition et exemple

Le groupe G opère sur $\underline{g}$ par l'action de conjugaison. Donc l'orbite d'un élément X de $\underline{g}$ est l'ensemble $\{aXa^{-1}; a \in G\}$, qu'on notera $G.X$.

Une *orbite nilpotente* est l'orbite d'une matrice nilpotente (i.e. une matrice qui s'annule à une certaine puissance, ou, en d'autres termes, une matrice qui admet 0 comme unique valeur propre).

Une *sous-algèbre de Cartan* d'une algèbre de Lie est une sous-algèbre de Lie commutative maximale, dont les éléments sont semi-simples (i.e. diagonalisables dans le cas de $gl_n(\mathbb{C})$). Elle sera notée $\underline{h}$. Daeis notre exemple de base, $\underline{h}$ est la sous-algèbre des matrices diagonales de $sl_n(\mathbb{C})$.

Les *racines d'une algèbre de Lie* sont certaines formes linéaires définies sur une sous-algèbre de Cartan.

1. Cet exposé a été présenté par les auteurs à l'Assemblée Générale de *Femmes et Mathématiques* du 15 mars 1997.

Description d'un système de racines de $sl_n(\mathbb{C})$
Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}, i \neq j$, soit $\alpha_{ij} : \underline{h} \to \mathbb{C}$, la forme linéaire définie par : *diag* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_i - \lambda_j$.
L'ensemble $R^+ := \{\alpha_{ij}; 1 \leq i < j \leq n\}$ correspond à l'ensemble des racines dites *positives.* L'ensemble $R^- := \{\alpha_{ij}; 1 \leq j < i \leq n\}$ correspond à l'ensemble des racines dites *négatives.* On a $R^- = -R^+$. L'ensemble $R := R^+ \cup R^-$ est un *système de racines* relatif à $\underline{h}$. Les racines $\alpha_i := \alpha_{i,i+1}, i = 1, \ldots, n-1$, correspondent aux *racines simples.* L'ensemble $S := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ est une *base de racines* relative à $\underline{h}$. On remarquera que :

1. $\forall \alpha_{ij} \in R^+, \alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha i + 1 + \cdots + \alpha_{i+k}$, où $j = i+k+1$. Donc toute racine positive s'écrit comme somme de racines simples consécutives. Pour $\alpha_{ij} \in R^-$, on a $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$.

2. Chaque racine positive α_{ij} peut être identifiée au vecteur $(0, .., 1, .., -1, .., 0)$ de $\mathbb{R}^n$, où toutes les composantes sont nulles sauf la composante i-ème (qui est 1) et la composante j-ème (qui est -1).

Le groupe de Weyl associé à un système de racines
Soit R un *système de racines* relatif à une sous-algèbre de Cartan $\underline{h}$ d'une algèbre de Lie semi-simple complexe $\underline{g}$. Alors $R \subset \underline{h}^*$ (i.e. les racines sont certaines formes linéaires de $\underline{h}$) . Soit $\alpha \in R$. Il existe alors un unique elément $\breve{\alpha}$ de $(\underline{h}^*)^* \cong \underline{h}$ tel que :

$$\langle \alpha, \breve{\alpha} \rangle = 2 \text{ et } \forall \beta \in R, (\beta - \langle \beta, \breve{\alpha} \rangle \alpha) \in R.$$

Soit $s_\alpha : \underline{h}^* \to \underline{h}^*$ l'application linéaire définie par $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \breve{\alpha} \rangle \alpha$, pour tout $\lambda \in \underline{h}^*$. Alors s_α est une réflexion (i.e. $(s_\alpha)^2 = Id$).
Le groupe W engendré par $\{s_\alpha | \alpha \text{ racine simple}\}$ est appelé le *groupe de Weyl* de $\underline{g}$.
Exemple 1 : On a vu que, dams $sl_n(\mathbb{C})$, les racines positives peuvent être identifiées aux vecteurs $(0, \ldots, 1, \ldots, -1, \ldots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$ (voir remarque 2 dams la description des racines de $sl_n(\mathbb{C})$) . En identifiant $(\mathbb{R}^n)^*$ à $\mathbb{R}^n$, l'opération $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire ordinaire dans $\mathbb{R}^n$. Avec ces identifications, on vérifie aisément que

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 2 & ; \quad j = i \\ -1 & ; \quad j = i+1 \text{ ou } j = i-1 \\ 0 & ; \quad \text{autrement} \end{cases}$$

Par linéarité de $\langle ., \breve{\alpha} \rangle$, les seules valeurs possibles pour $\langle \beta, \breve{\alpha} \rangle$, où $\alpha \in S$ et $\beta \in R$, sont $2, -2, 1, -1, 0$.
Le groupe de Weyl de $sl_n(\mathbb{C})$ est isomorphe au groupe symétrique S_n.
On notera $s_i := s_{\alpha_i}, i = 1, \ldots, n-1$.

Description de la décomposition triangulaire de $sl_n(\mathbb{C})$
Soit pour tout $\alpha = \alpha_{ij} \in R, X_\alpha := E_{ij}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice (i, j) , qui est 1. Pour $\alpha = \alpha_i \in S$, on désigne par $H_\alpha := E_{ii} - E_{i+1,i+1}$ la matrice diagonale dont le coefficient d'indice (i, i) est 1, le coefficient d'indice $(i+1, i+1)$ est -1, et les autres coefficients sont nuls.
Soit $\underline{n}_+ := \oplus_{\alpha \in R^+} \mathbb{C} X_\alpha$, la sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures nilpotentes.
Soit $\underline{n}_- := \oplus_{\alpha \in R^-} \mathbb{C} X_\alpha$, la sous-algèbre des matrices triangulaires inférieures nilpotentes.
Soit $\underline{h} = \oplus_{\alpha \in S} \mathbb{C} H_\alpha$, la sous-algèbre de matrices diagonales. L'ensemble $\{X_\alpha; \alpha \in R\} \cup \{H_\alpha; \alpha \in S\}$ forme une base de $\underline{g}$. Donc on a une décomposition $\underline{g} = \underline{n}_+ \oplus \underline{h} \oplus \underline{n}_-$, qni est en fait une somme directe de sous-algèbres de Lie de $\underline{g}$. C'est donc une décomposition triangulaire de $sl_n(\mathbb{C})$.

Definition d'une variété orbitale
Soit $O = G.X$ une orbite nilpotente de $\underline{g}$. On peut considérer $O \cap \underline{n}_+$ comme une varété algébrique (muni de la topologie de Zariski). Il est connu que cet espace a un nombre fini de composantes irréductibles (connexes).

Chaque composante irréductible de $O \cap \underline{n}_+$ est appelée *variété orbitale*. Toute variété orbitale V peut être considérée comme une sous-variété de la variété affine $\underline{n}_+$. Notons $\dim \underline{n}_+ = k$: on peut alors identifier 1'adhérence (pour la topologie de Zariski) $\overline{V}$ de V dams $\underline{n}_+$ à un sous-espace de $\mathbb{C}^k$.
L'*idéal de définition* de $\overline{V}$, noté $I(\overline{V}\rangle$, est l'idéal de $\mathbb{C}[X_1, \ \dots, X_k]$ engendré par tous les polynômes qui s'annulent sur $\overline{V}$.
Exemple 2 : Dans $sl_3(\mathbb{C})$, on a $S = \{\alpha_1, \ \alpha_2\}, R^+ = \{\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_1 + \alpha_2\}$,
et $\underline{n}_+ = \mathbb{C}X_{\alpha_1} \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_2} \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_1+\alpha_2}$.
Les orbites nilpotentes sont paramétrées par les partitions de 3 via les formes de Jordan :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightleftharpoons (1,1,1), \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X_{\alpha_1} \rightleftharpoons (2,1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X_{\alpha_1} + X_{\alpha_2} \rightleftharpoons (3).$$

On a donc 3 orbites nilpotentes :
$O_1 =$ 1'orbite nulle, $O_2 = G.X_{\alpha_1}$ et $O_3 = G.(X_{\alpha_1} + X_{\alpha_2})$, où $G = SL_3(\mathbb{C})$.
Notons que O_3 est l'orbite nilpotente de dimension maximale. Cette orbite est dense dams la variété de tous les éléments nilpotents de $sl_3(\mathbb{C})$. La variété $O_1 \cap \underline{n}_+ = \{0\}$ est bien sûr irréductible. On peut montrer que la variété $O_3 \cap \rightarrow$ n est aussi irréductible.
Par un calcul direct, on montre que : $O_2 \cap \underline{n}_+ = V_1 \mathrm{U} V_2$, où

$$V_1 = \{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ (a, \ b) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\} \ \}$$

$$V_2 = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ (a,b) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\} \ \}.$$

Les idéaux de définition de $\overline{V}_1$ et $\overline{V}_2$ sont donc :

$$I(\overline{V}_1) = X_{\alpha_2}\mathbb{C}[X_{a_1}, \ X_{\alpha_1+\alpha_2}, \ X_{\alpha_2}] \text{ et } I(\overline{V}_2) = X_{\alpha_1}\mathbb{C}[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_1+\alpha_2}, X_{\alpha 2}].$$

3. Modules de plus haut poids

Soit L un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On appelle *représentation* de $\underline{g}$ dams L un homomorphisme ρ de $\underline{g}$ dams $gl(L)$. Pour tout $x \in \underline{g}$, et pour tout $v \in L$, on pose $\rho(x)(v) := x.v$, et on dit que L est un $\underline{g}$-module. Soit L un $\underline{g}$-module. On dit qu'un élément $\lambda \in \underline{h}^*$ est un *poids* de L si l'espace $L_\lambda := \{v \in L | h.v = \lambda(h)v, \ \forall h \in \underline{h}\}$ n'est pas réduit à $\{0\}$, auquel cas cet espace est appelé *espace de poids* λ. Soit $\lambda \in \underline{h}^*$ un *poids* de L, on dit que $L = L(\lambda)$ est un *module de plus haut poids* λ si

a) $\dim L_\lambda = 1$
b) $\underline{n}_+ . L_\lambda = \{0\}$
c) $L = U(\underline{g}).L_\lambda = U(\underline{n}_-).L_\lambda$,

où $U(.)$ désigne 1'algèbre enveloppante. Un tel module est engendré par un *vecteur de plus haut poids*. Tout module simple de dimension finie est un module de plus haut poids. Un module de plus haut poids L se décompose en somme directe des espaces de poids : $L = \oplus_{\mu \text{ poids}} L_\mu$. Pour tout poids $\mu, dim L_\mu$ est finie. Le *caractère* du *module de plus haut* *poids* L est alors défini par :

$$\chi(L) := \sum_{\mu \text{ poids}} (dim L_\mu) e^\mu,$$

où e^μ est l'application de $\underline{h}^*$ dams $\mathbb{Z}$, qui vaut 1 en μ et 0 ailleurs.

.Soit $P = \{\mu \in \underline{h}^* | \langle \mu, \check{\alpha} \rangle \in \mathbb{Z} \ , \ \forall \alpha \in R\}$ l'ensemble des poids *entiers* et $\mathbb{Z}[P]$ le réseau des poids entiers, i.e. l'ensemble des applications de $\underline{h}^*$ dams $\mathbb{Z}$ qui ne s'annulent que pour un nombre fini d'éléments de P. Alors $e^\mu \in \mathbb{Z}[P]$, pour tout $\mu \in P$. Dorénavant, on suppose que tous les poids sont entiers. Soit α une racine simple. On définit un opérateur $\triangle_\alpha : \mathbb{Z}[P] \to \mathbb{Z}[P]$ par

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha (e^\mu) &:= \tfrac{1-e^{-\alpha} s_\alpha}{1-e^{-\alpha}} e^\mu \\ &= \begin{cases} e^\mu + e^{\mu-\alpha} + \cdots + e^{\mu - \langle \mu, \check{\alpha} \rangle \alpha} ; & \langle \mu, \check{\alpha} \rangle \geq 0 \\ 0 ; & \langle \mu, \check{\alpha} \rangle = -1 \\ -e^{\mu+\alpha} - e^{\mu+2\alpha} - \cdots - e^{\mu - (\langle \mu, \check{\alpha} \rangle + 1)\alpha} ; & \langle \mu, \check{\alpha} \rangle \leq -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ une décomposition réduite de $w \in W$, c'est à dire que k est le nombre minimal de réflexions avec lequel on peut écrire w. On définit $\Delta_w := \Delta_{\alpha_{i_1}} \dots \Delta_{\alpha_{i_k}}$. Les opérateurs $\triangle_w$, qui ne dépendent pas du choix de la décomposition réduite de w, sont appelés *opérateurs de Demazure.* Ces opérateurs sont connectés aux $\underline{g}$-modules de la façon suivante : si L est un module simple de dimension finie de plus haut poids λ et si $w_0 \in W$ est l'élement de longueur maximale, alors on a la formule de caractère de Demazure :

$$\chi(L) = \Delta_{w_0} e^\lambda$$

Modules gradués

Nous n'introduirons ici que les notions et notations nécessaires à la compréhension du paragraphe 5. Pour plus de détails, consulter [4].

Il existe une filtration canonique $(U_n(\underline{g}))_{n \geq 0}$, où les $(U_n(\underline{g}))(n \geq 0)$ sont des sous$-\underline{g}$-modules de $U(\underline{g})$ de dimension finie, qui satisfont $U_n(\underline{g}) U_p(\underline{g}) \subset U_{n+p}(\underline{g})$, pour tous $n, p \geq 0$.

L'algèbre

$$gr(U(\underline{g})) := \bigoplus_{n \geq 0} (U_n(\underline{g}) / U_{n-1}(\underline{g}))$$

est *l'algèbre graduée* associée à l'algèbre filtrée $U(\underline{g})$. C'est une algèbre commutative. Soit M un $U(\underline{g})$-module engendré par une partie A. Alors

$$gr(M) := \bigoplus_{n \geq 0} (U_n(\underline{g}) A / U_{n-1}(\underline{g}) A)$$

est *le module gradué* associé à M. Dans le cas où M est un module de plus haut poids λ, on prend $A = M_\lambda$. Alors on a $gr(M) = S(\underline{n}_-) gr(M)_\lambda$. Si I un idéal bilatère de $U(\underline{g})$, alors

$$gr(I) := \bigoplus_{n \geq 0} ((I \cap U_n(\underline{g})) / (I \cap U_{n-1}(\underline{g})))$$

est *l'idéal gradué* associé à I.

Travail de Joseph

La méthode des orbites de Kirillov motive une grande partie de la recherche actuelle dans la théorie de la représentation. Kirillov avait établi une bijection entre les représentations unitaires et les orbites coadjointes d'une algèbre de Lie nilpotente. La méthode des orbites consiste à imiter ce résultat pour d'autres groupes, en particulier les groupes semi-simples. Il est maintenant accepté qu'il n'existe pas de telle bijection mais il semble exister une forte connexion naturelle entre les deux. Celle que Joseph propose est entre les variétés orbitales et les représentations de plus haut poids. Soit V une variété orbitale. Par la forme de Killing, on identifie $\underline{n}_+^*$ avec $\underline{n}_-$, donc $S(\underline{n}_-) \simeq \mathbb{C}[\underline{n}_+]$. De plus, $R(\overline{V}) = S(\underline{n}_-)/I(\overline{V})$. Soit $L(\lambda) = U(\underline{n}_-)e_\lambda$ un module de plus haut poids engendré par le vecteur e_λ. On pose $A = \mathrm{Ann}_{U(\underline{n}_-)}e_\lambda$. On a $L(\lambda) = U(\underline{n}_-)/A$. Donc $grL(\lambda) = S(\underline{n}_-)e_\lambda = S(\underline{n}_-)/gr(A)$. Joseph a proposé la relation suivante :

Conjecture 1 : *Il existe un module simple de plus haut poids $L(\lambda)$ tel que*

$$I(\overline{V}) = gr(Ann_{U(\underline{n}_-)}e_\lambda) \ .$$

La *quantification* consiste à trouver un tel module. Une conséquence de cette conjecture serait que $\chi(R(\overline{V})) = e^{-\lambda}\chi(L(\lambda))$. Cette première conjecture a été vérifiée pour toutes les variétés orbitales de $sl_n(\mathbb{C})$, pour $n \leq 5$, et dans $sl_6(\mathbb{C})$, il y a exactement deux contre-exemples à cette conjecture dans, respectivement, les orbites $O_1 = G.(X_{\alpha_1} + X_{\alpha_3} + X_{\alpha_5})$ et $O_2 = G.(X_{\alpha_1} + X_{\alpha_2})$[1], [2]. Ceci a conduit Joseph à modifier cette première conjecture.

Conjecture 2 : *Il existe un module de plus haut poids $H(\lambda\rangle$ (non nécessairement simple) et tel que $I(\overline{V}) = gr(Ann_{U(\underline{n}_-)}e_\lambda)$* . Dans [2], il a été vérifié que les deux contre-exemples trouvés pour la conjecture 1 satisfont la conjecture 2. Dams un preprint récent [5], Joseph a montré que : si V est une variété orbitale dams une orbite nilpotente de dimension minimale non nulle de $\underline{g}$, alors il existe un module de plus haut poids $L(\lambda)$ tel que $\chi(L(\lambda)) = e^\lambda\chi(S(\underline{n}_-)/I(\overline{V}))$. De plus, il montre que pour une telle variété orbitale V, il existe un sous-ensemble σ_V de l'ensemble des racines positives de $\underline{g}$ et il existe $w \in W$ tels que :

$$(*) \ \chi(R(\overline{V})) = \Delta_w(\frac{1}{\prod_{\alpha\in\sigma_V}(1-e^{-\alpha})})$$

Exemple : On considère, dans la $SL_3(\mathbb{C})$-orbite nilpotente de dimension minimale, i.e. l'orbite $G.X_{\alpha_1}$, notée O_2 précédemment (voir 2, exemple 2), la variété orbitale

$$V_1 = \{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}\}$$

Alors $\overline{V}_1$ est stabilisée par le sous-groupe parabolique P, dont l'algèbre de Lie, $\underline{p}$, est engendrée par $\underline{h} \cup \{X_\alpha; \alpha \in R^+\} \mathrm{U} \{X_{-\alpha_2}\}$, i.e.

$$\underline{p} = \{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix} ; a,b,c,d,e,f,g \in \mathbb{C} \ \text{ et } \ a+d+g=0\}.$$

On a la décomposition : $\underline{p} = \underline{r} \oplus \underline{m}$, où

$$\underline{\mathbf{r}} = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix} ; a,d,e,f,g \in \mathbb{C} \ \text{ et } \ a+d+g=0\} \text{ et}$$

$$\underline{\mathbf{m}} = \{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; b, c \in \mathbb{C}\}$$

On vérifie facilement que $\overline{V} = \underline{m}$ et que V est un R-module, où R est un groupe algébrique d'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{r}} \simeq \mathbb{C} \times sl_2(\mathbb{C})$. Pour établir (*) dans ce cas, on calcule la partie à gauche :

$$\begin{aligned} \chi(R(\overline{V})) &= \chi\left(\mathbb{C}\left[X_{-\alpha_1}, X_{-\alpha_1-\alpha_2}\right]\right) \\ &= \sum_{n,m \geq 0} e^{n\alpha_1} e^{m(\alpha_1+\alpha_2)} \\ &= \frac{1}{1-e^{-\alpha_1}} \frac{1}{1-e^{-\alpha_1-\alpha_2}} \end{aligned}$$

D'autre part, pour calculer la partie à droite, on choisit $\sigma_V = \{\alpha_1\}$ et $w = s_{\alpha_2}$. Comme $\langle \alpha_1, \overline{\alpha}_2 \rangle = -1$, on a

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha_2}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha_1}}\right) &= \sum_{n\geq 0} \Delta_{\alpha_2}\left(e^{-n\alpha_1}\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} e^{-n\alpha_1} \left(\frac{1-e^{-(n+1)\alpha_2}}{1-e^{-\alpha_2}}\right) \\ &= \frac{1}{1-e^{-\alpha_2}} \left(\sum_{n\geq 0} e^{-n\alpha_1} - e^{-\alpha_2} \sum_{n \geq 0} e^{-n(\alpha_1+\alpha_2)}\right) \\ &= \frac{1}{1-e^{-\alpha_2}} \left(\frac{1}{1-e^{-\alpha_1}} - \frac{e^{-\alpha_2}}{1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)}}\right) \\ &= \frac{1}{1-e^{-\alpha_1}} \frac{1}{1-e^{-\alpha_1-\alpha_2}} = \chi(R(\overline{V})) \end{aligned}$$

Donc la formule (*) est vérifiée. Ceci a conduit Joseph à établir la conjecture suivante : **Conjecture 3** [5] : Pour chaque variété orbitale V, il existe un sous-ensemble σ_V de l'ensemble des racines de $\underline{g}$, $w \in W$ et un poids λ tels que :

$$\chi(R(\overline{V})) = e^{-\lambda} \Delta_w \left(\frac{e^{\lambda}}{\prod_{\alpha \in \sigma_V} (1-e^{-\alpha})}\right)$$

L'intérêt de cette nouvelle conjecture est qu'on n'est pas obligé de trouver un module de plus haut poids pour décrire la structure de $R(\overline{V})$. Comme nous l'avons précédemment signalé, cette conjecture a été v''erifiée pour les variétés orbitales dans les orbites nilpotentes de dimensions minimales. On peut également vérifier cette conjecture pour les variétés orbitales dites de Richardson, i.e. $\overline{V}$ est une certaine sous-algèbre de $\underline{n}_+$ (plus précisément : le nilradical de la sous-algèbre parabolique maximale laissant V stable).

Bibliographie

[1] E. Benlolo, *Étude des variétés orbitales dans* $sl_n(\mathbb{C})$, C.R. Acad. Sci. Paris 315 Série I (1992), 537-540.

[2] E. Benlolo, *Sur la quantification de certaines variétés orbitales*, Bull. Sci. math. 118 (1994), 225-243.

[3] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Paris, Gauthiers-Villars (Cahiers Scientifiques, 37), (1974).

[4] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and representation theory*, (Springer-Verlag) (Graduate Texts in Mathematics, 9), (1980).

[5] A. Joseph, *Orbital varieties of the minimal orbit*, Preprint (1996).

Laboratoire de Mathématiques
U.F.R. Sciences, B.P. 1039
51687 Reims cedex 02
elise. b enlolo@univ-reims. fr
sanderso@math. rut gers. edu