Groupes de Grothendieck associés à des sous-quotients d'un groupe fini

Djouher Zobiri

Ce travail se situe dans le cadre de la description de la structure galoisienne des objets arithmétiques associés à une extension galoisienne K/k de groupe de Galois Γ connaissant celle de sous-extensions K_i/k_i avec $k \subset k_i \subset K_i \subset K$ bien choisies. Pour avancer dans cette direction on introduit plusieurs notions de groupe de Grothendieck associé à des sous-quotients de Γ.

Soient Γ un groupe fini, $\mathcal{F}$ une famille de sous-quotients. On définit une $\mathcal{F}$-catégorie dépendant essentiellement des sous-quotients. Cette catégorie nous permet d'introduire 3 types de suites exactes. Ainsi on obtient 3 nouveaux types de groupes de Grothendieck qu'on note par :

$G_f\left(A[\Gamma], \mathcal{F}\right)$: *le $\mathcal{F}$-groupe de Grothendieck faible.*

$G_0\left(A[\Gamma], \mathcal{F}\right)$: *le $\mathcal{F}$-groupe de Grothendieck exact.*

$G_\oplus\left(A[\Gamma], \mathcal{F}\right)$: *le $\mathcal{F}$-groupe de Grothendieck.*

La question principale qui nous préoccupe est la démonstration de la conjecture suivante :

Conjecture : Pour toute famille $\mathcal{F}$ il existe des familles $\mathcal{F}_f, \mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_\oplus$ telles que les applications suivantes :

$$\begin{array}{rcl} T_f \ : \ G_f\left(\mathbb{C}[\Gamma], \mathcal{F}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\left(R^{\perp\perp}_{\mathcal{F}_f}(\Gamma), \mathbb{Z}\right) \\ {[V]_f} & \longmapsto & T_f\left([V]_f\right) \ : \quad \chi \qquad \longmapsto < \chi_V, \ \chi > \\ T_0 \ : \ G_0\left(\mathbb{C}[\Gamma], \mathcal{F}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\left(R^{\perp\perp}_{\mathcal{F}_0}(\Gamma), \mathbb{Z}\right) \\ {[V]_0} & \longmapsto & T_f\left([V]_0\right) \ : \quad \chi \qquad \longmapsto < \chi_V, \ \chi > \\ T_\oplus \ : \ G_\oplus\left(\mathbb{C}[\Gamma], \mathcal{F}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\left(R^{\perp\perp}_{\mathcal{F}_{oplus}}(\Gamma), \mathbb{Z}\right) \\ {[V]_\oplus} & \longmapsto & T_\oplus\left([V]_\oplus\right) \ : \quad \chi \qquad \longmapsto < \chi_V, \ \chi > \end{array}$$

sont des isomorphismes.

Définition 1 Soit Γ un groupe fini. Un *sous-quotient* de Γ est un couple (Δ, Σ) de sous-groupes de Γ, tel que Σ soit distingué dans Δ.

Dans tout ce qui va suivre $SQ(\Gamma)$ désigne l'ensemble de tous les sous-quotients de Γ et $\mathcal{F} \subset SQ(\Gamma)$.

Définition 2 Soit $\mathcal{F}$ une famille de sous-quotients. Le groupe, $R_{\mathcal{F}}(\Gamma)$, des *caractères associés aux sous-quotients* est le sous-groupe de $\mathrm{R}(\Gamma)$ engendré par la famille : $\left\{Inf^{\Gamma}_{\Delta}\ Inf^{\Delta}_{\Sigma}\ \varphi \ / \ (\Delta, \ \Sigma) \ \in \ \mathcal{F}, \ \varphi \ \in R(\Delta/\Sigma)\right\}$.

$\mathcal{F}$-catégorie

Definition 3 Soient Γ un groupe fini, $F \subset SQ(\Gamma)$, A un anneau, et soient V *et* V' deux $A[\Gamma]$-modules. On appelle $\mathcal{F}$-homomorphisme de V dans V' un A-homomorphisme f défini sur V à valeurs dans V' et vérifiant pour tout sous-quotient $(\Delta,\ \Sigma)$ dans $\mathcal{F}$, la restriction $f/_{\Sigma}$ de f à V^{Σ} est un $A[\Delta/\Sigma]$-homomorphisme de V^{Σ} dans V'^{Σ}.

Définition 4 On définit la catégorie $C(A[\Gamma],\mathcal{F})$ comme étant la catégorie dont les objets sont des A[Γ]-modules de type fini et les morphismes sont des $\mathcal{F}$-homomorphismes. Elle sera appelée $\mathcal{F}$-catégorie.

Suites exactes

Définition 5 Soient V, V' et V'' des A[Γ]-modules tels que pour tout sous-quotient $\delta = (\Delta, \Sigma)$ dams $\mathcal{F}$, il existe f_δ, g_δ des A[Δ/Σ] -homomorphismes pour lesquels :

$$0 \longrightarrow V'^{\Sigma} \xrightarrow{f_\delta} V^{\Sigma} \xrightarrow{g_\delta} V''^{\Sigma} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte en tant que A[Δ /Σ]− modules. Une telle suite est appelée $\mathcal{F}$-*suite faiblement exacte* et est notée par $0 \longrightarrow V' \overset{(f_\delta)_{\delta\in\mathcal{F}}}{\longrightarrow} V \overset{(g_\delta)_{\delta\in\mathcal{F}}}{\longrightarrow} V'' \longrightarrow 0$.

Definition 6 Soient V, V' et V'' des $A[\Gamma]$-modules. Soient f et g deux A-homomorphismes et $0 \longrightarrow V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V'' \longrightarrow 0$ une suite exacte en tant que A-modules. Si pour tout $\delta = (\Delta,\ \Sigma)$ dans $\mathcal{F}$ les suites $0\longrightarrow V'^{\Sigma} \xrightarrow{f_{/\Sigma}} V^{\Sigma} \xrightarrow{g_{/\Sigma}} V''^{\Sigma} \longrightarrow 0$ où $f_{/\Sigma}$ *et* $g_{/\Sigma}$ désignent respectivement les restrictions de f et g, sont exactes en tant que A[Δ/Σ]-modules, on dira que la suite $0 \longrightarrow V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V'' \longrightarrow 0$ est une $\mathcal{F}$-*suite exacte.*

Definition 7 Soit $0 \longrightarrow V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V'' \longrightarrow 0$ une $\mathcal{F}$-suite exacte. Si g admet une section s qui est un $\mathcal{F}$-homomorphisme, on dira que cette suite est une $\mathcal{F}$-*suite exacte scindée.*

$\mathcal{F}$-groupes de Grothendieck

Pour chaque type de suite exacte précédente, on définit respectivement un groupe de Grothendieck (voir [Zo]).

Etude du F-groupe de Grothendieck faible $G_f(K[\Gamma],\mathcal{F})$

Lemme *Soient* Γ *un groupe fini,* $F \subset SQ(\Gamma)$, K *un corps de caractéristique zéro,* V *et* V' *deux* $K[\Gamma]$ -modules. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $[V]_f = [V']_f$ dans $G_f(K[\Gamma],\mathcal{F})$.
- ii) il existe U' un K[Γ]-module tel que les deux $K[\Gamma]$-modules $V \oplus U'$ et $V' \oplus U'$ sont $\mathcal{F}$-faiblement isomorphes.
- iii) $V^{\Sigma} \simeq V'^{\Sigma}$ en tant que $K[\Delta/\Sigma]$-*module* pour tout (Δ, Σ) dans $\mathcal{F}$.
- iv) Les deux $K[\Gamma]-$ modules V et V' sont $\mathcal{F}$-faiblement isomorphes.

Théorème 1 *Soient* Γ *un groupe fini d'ordre* n, K *un corps de caractéristique zéro contenant les racines* $n^{i\grave{e}mes}$ *de l'unité, l'application :*

$$\begin{array}{rcl} T_f : G_f(K[\Gamma], \mathcal{F}) & \longrightarrow & Hom\left(R_{\mathcal{F}}(\Gamma)^{\perp\perp}, \mathbb{Z}\right) \\ [V]_f & \longmapsto & T_f([V]_f) \ : \ \chi \longmapsto < \chi_\gamma, \ \chi > \end{array}$$

est un isomorphisme.

Etude du $\mathcal{F}$-groupe de Grothendieck scindé $G_{\oplus}(K[\Gamma], \mathcal{F})$

Famille complète et complété d'une famille

Definition 8 Soient $(\Delta,\ \Sigma)$ et $(\Delta',\ \Sigma')$ deux sous-quotients. On dira qu'ils vérifient la propriéte $\wp$, si et seulement si, le sous-groupe Δ est inclus dams le normalisateur de Σ' dans Γ et le sous-groupe Δ' est inclus dans le normalisateur de Σ dans Γ i.e.

$$(\Delta,\ \Sigma) \ et \ (\Delta',\ \Sigma') \text{ vérifient la propriété } \wp \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ \subset \ N_\Gamma(\Sigma') \\ \quad et \\ \Delta' \ \subset \ N_\Gamma(\Sigma) \end{cases}$$

Soit $\mathcal{F}$ une famille de sous-quotients. On dira que c'est une famille vérifiant la propriété $\wp$ si et seulement si tous ses éléments vérifient, deux à deux, la propriété $\wp$

Définition 9 Une famille $\mathcal{F}$ vérifiant la propri'eté $\wp$ est dite complète, si et seulement si, pour tous sous-quotients (Δ, Σ) et (Δ', Σ') dans $\mathcal{F}$ le sous-quotient $(\overline{\Delta \cup \Delta'}, \overline{\Sigma \cup \Sigma'})$ est dans $\mathcal{F}$.

Definition 10 Soit $\mathcal{F}$ une famille vérifiant la propriété $\wp$. On appellera complété de la famille $\mathcal{F}$, la plus petite famille complète contenant $\mathcal{F}$ et on la note $\mathcal{F}_c$.

Théorème 2 *Soient* Γ *un groupe fini d'ordre* n, K *un corps de caractéristique zéro contenant les racines* $n^{i\grave{e}mes}$ *de l'unité et* $\mathcal{F}$ *une famille vérifiant la propriété* $\wp$. *L'application :*

$$\begin{array}{rcl} T_{\oplus} \ : \ G_{\oplus}(K[\Gamma],\ \mathcal{F}) & \longrightarrow & Hom\left(R_{\mathcal{F}_c}(\Gamma)^{\perp\perp},\ \mathbb{Z}\right) \\ [V]_{\oplus} & \longmapsto & T_{\oplus}([V]_{\oplus}) \ : \ \chi \longmapsto < \chi_V, \chi > \end{array}$$

est un isomorphisme.

Etude du $\mathcal{F}$-groupe de Grothendieck exact $G_0(K[\Gamma], \mathcal{F})$

Théorème 3 *Soit* $\mathcal{F} = \{(\Delta, \Sigma), (\Delta', \Sigma'), (1, 1)\}$ *une famille vérifiant la propriété* $\wp$ *et telle que* $\Sigma' \not\subset \Delta$ *et* $\Sigma \not\subset \Delta'$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *i)* $[V]_f = [V']_f$.
- *ii) Il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n[V]_{\oplus} = n[V']_{\oplus}$.
- *iii)* $[V]_{\oplus} = [V']_{\oplus}$.
- *iv)* $[V]_0 = [V']_0$.

Théorème 4 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 3.3. L'application*

$$\begin{array}{rcl} T_0 \;:\; G_0(K[\Gamma],\mathcal{F}) & \longrightarrow & Hom\left(R_{\mathcal{F}}(\Gamma)^{\perp\perp},\ \mathbb{Z}\right) \\ [V]_0 & \longmapsto & T_0([V]_0) \;:\; \chi \longmapsto <\chi_V,\ \chi> \end{array}$$

est un isomorphisme.

Théorème 5 *Soient* Γ *un groupe fini,* V, V' *deux* $K[\Gamma]$*-modules et soit*

$$\mathcal{F} = \{(\Delta,\Sigma),(\Delta',\Sigma'),(1,1)\}$$

une famille vérifiant la propriété $\wp$ *et l'une des inclusions* $\Sigma' \subset \Delta$*, ou bien,* $\Sigma \subset \Delta'$*. Alors si on pose*

$$\mathcal{F}_0 = \left\{(\Delta,\Sigma),(\Delta',\Sigma'),(\overline{\Delta\cup\Delta'},\overline{\Sigma\cup\Sigma'}),(1,1)\right\}.$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *i)* $[V]_0 = [V']_0$ *dans* $G_0(K[\Gamma],\mathcal{F})$.
- *ii)* $[V]_0 = [V']_0$ *dans* $G_0(K[\Gamma],\mathcal{F}_0)$.
- *iii)* $[V]_f = [V']_f$ *dans* $G_f(K[\Gamma],\mathcal{F}_0)$.

Théorème 6 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 3.5 et si on suppose de plus que le corps* K *contient les racines* $n^{\text{ièmes}}$ *de l'unite', alors l' application :*

$$\begin{array}{rcl} T_0 \;:\; G_0\left(K[\Gamma],\mathcal{F}\right) & \longrightarrow & Hom\left(R_{\mathcal{F}_0}(\Gamma)^{\perp\perp},\ \mathbb{Z}\right) \\ [V]_0 & \longmapsto & T_0\left([V]_0\right) \;:\; \chi \longmapsto <\chi_V,\ \chi> \end{array}$$

est un isomorphisme.

Cas cyclique

Soit $\Gamma = C_n$ le groupe cyclique d'ordre n. Pour tout k divisant n, on désigne par C_k le sous-groupe de C_n d'ordre k. Posons

$$\mathcal{F}_0 = \left\{(C_{ppcm(m,m')}C_{l'})\ \forall (C_m,\ C_l),(C_{m'},\ C_{l'}) \text{ dans } \mathcal{F}, C_l \subset C_{l'} \subset C_m\right\}.$$

Théorème 7 *Soit* K *un corps contenant les racines* $n^{\text{ièmes}}$ *de l'unité. L'application :*

$$\begin{array}{rcl} T_0 \;:\; G_0\left(K[C_n],\mathcal{F}\right) & \longrightarrow & Hom(R_{\mathcal{F}_0}(C_n),\mathbb{Z}) \\ [V]_0 & \longmapsto & T_0\left([V]_0\right) \;:\; \chi \longmapsto <\chi_V,\ \chi> \end{array}$$

est un isomorphisme.

Bibliographie

[1] *F. W. Anderson, K. R. Fuller*, Rings and categories of modules, Graduate text in mathematics 13, Springer Verlag, 2nd edit. 1992.

[2] *C. W. Curtis et I. Reiner*, Representations theory of finite groups and associative algebras, edited by : R. Courant, L. Bers, J.J. Stokers, 1962.

[3] *C. W. Curtis, I. Reiner*, Methods of representation theory with applications to finite groups and orders, Vol 1, Wiley classics library, 1990.

[4] *P.Deligne*, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, Modular functions of one variable II, Lecture Notes in Math. 349 (1972) p.501-597.

[5] *A. W. M. Dress*, Contribution to the theory of induced representations, Algebraic K-theory II, Lecture Notes in Math. 342, (1973), p.183 - 240

[6] *A. Heller, Reiner*, Grothendieck groups of orders in semi-simple algebras , Trans. Amer. Soc. 112, vol 2, (1964), p.344-355.

[7] *J-P Serre*, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1971.

[8] [Zo] *Dj, Zobiri* Groupes de Grothendieck associés à des sous-quotients d'un groupe fini, thèse, (1996).

Djouher Zobiri
U.F.R Mathématiques et Informatique
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex, FRANCE