Contractions d'algèbre de Lie et torsion de Nijenhuis

Naïma Bedjaoui

Les contractions d'algèbres de Lie définies par Inonũ et Wigner [2] ont été généralisées par Saletan [7]. Nous rappelons les définitions, étudions quelques exemples et montrons que, sous la condition "torsion de Nijenhuis nulle", crochet contracté et crochet déformé sont identiques. Enfin, nous nous intéressons à la compatibilité des crochets contracté et initial.

Des contractions de type plus général ont été envisagées par d'autres auteurs récemment, entre autres Rainer [6] en 1995, sous le nom de transition.

Definition 1 *Soit S un espace vectoriel et $\mathcal{G}^{(0)} = (S, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie d'espace sous-jacent S. Pour $\lambda \in [0,\ 1]$, on deśigne par $U_\lambda : S \to S$ une famille continue d'endomorphismes, inversibles si et seulement si $\lambda \neq 0$. Si $\lambda \in]\ 0,\ 1]$, on peut définir une algèbre de Lie $(S, [\ ,\ ]_\lambda)$ isomorphe à $\mathcal{G}^{(0)}$, par.*

$$\forall x, y \in S, [x, y]_\lambda = U_\lambda^{-1}\left([U_\lambda(x), U_\lambda(y)]\right). \tag{1}$$

Si la limite de $[x, y]_\lambda$ quand λ tend vers 0 existe, on la note $[x, y]^{(1)}$. Muni de $[\ ,\ ]^{(1)}, S$ est alors une algèbre de Lie notée $\mathcal{G}^{(1)}$, en général non isomorphe à $\mathcal{G}^{(0)}$ et appelée contraction ou contractée de $\mathcal{G}^{(0)}$.

Soit $\mathcal{G}^{(0)} = sl(2, \mathbb{C})$ muni de la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ telle que

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alors $[e_1,\ e_2] = e_3, [e_1,\ e_3] = -2e_1, [e_2,\ e_3] = 2e_2$.

Exemple 1 On considère la famille d'endomorphismes, pour $\lambda \in [0, 1]$,

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$[e_1, e_2]_\lambda = (1+\lambda)e_3, [e_1, e_3]_\lambda = -2\lambda e_1, [e_2, e_3]_\lambda = 2\lambda e_2,$$

d'où $[e_1,\ e_2]^{(1)} = e_3, [e_1, e_3]^{(1)} = 0, [e_2, e_3]^{(1)} = 0$, et $\mathcal{G}^{(1\}} = (S, [\ ,\ ]^{(1)})$ est donc l'algèbre de Heisenberg.

Exemple 2 Prenons pour famille d'endomorphismes, pour $\lambda \in [0, 1]$,

$$V_\lambda = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

alors

$$[e_1, e_2]_\lambda = \lambda(1+\lambda)e_3, [e_1, e_3]_\lambda = -2\lambda e_1, [e_2, e_3]_\lambda = 2\lambda e_2$$

$$[e_1,e_2]^{(1)}=[e_1,e_3]^{(1)}=[e_2,e_3]^{(1)}=0$$

L'algèbre contractée $\mathcal{G}^{(1)}$ est commutative.

Exemple 3 Prenons enfin la famine, pour $\lambda \in [0,1]$,

$$W_\lambda = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$[e_1,e_2]_\lambda = \frac{1+\lambda}{\lambda} e_3$$

et $\lim_{\lambda\to 0}[e_1,e_2]_\lambda$ n'existe pas. Dans ce cas, la contraction de $\mathcal{G}^{(0)}$ n'existe pas.

Remarquons que dans les trois cas, la limite de la famille d'endomorphismes quand λ tend vers 0 est la même, ce qui montre que l'existence de la contraction ainsi que l'algèbre contractée (si elle existe) dépendent de la famille U_λ d'endomorphismes choisie et pas seulement de $\lim_{\lambda\to 0} U_\lambda$.

Definition 2 Nous appellerons contractions de Saletan [7], les contractions correspondant aux endomorphismes U_λ qui s'écrivent $U_\lambda = \lambda I + u$ où u est un endomorphisme de S singulier. Si le crochet contracté $[\ ,\ ]^{(1)}$ existe, on dit alors que u contracte $\mathcal{G}^{(0)}$ et que $[\ ,\ ]^{(1)}$ est le crochet contracté de $[\ ,\ ]$ par u.

Proposition Pour tout endomorphisme u de S, il existe un entier naturel non nul q, appelé indice de Riesz ou indice de longueur de chaîne, tel que :

$$S \supset \operatorname{Im} u \supset Imu^2 \supset \ldots \supset Imu^q = Imu^{q+1} = \ldots$$
$$0 \subset \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} u^q = \operatorname{Ker} u^{q+1} = \ldots$$

Remarque Le cas étudié par Inonü et Wigner dans [2] est celui où $U_\lambda = \lambda I + u$, et u est d'indice de Riesz $q = 1$.

On pose alors $\operatorname{Im} u^q = S_R$, $Ker\ u^g = S_N$ et l'on a la décomposition de Fitting [1] [5] $S = S_R \oplus S_N$. Pour tout $x \in S$, on désigne par x_R la projection de x sur S_R et par x_N la projection de x sur S_N. Nous nous proposons de montrer, par une méthode qui évite les calculs assez complexes de [7], le théorème suivant.

Théorème 1 *Une condition nécessaire et suffisante pour que le crochet contracté* $[\ ,\ ]^{(1\}}$ *existe est*

$$\forall x,y \in S, u^2[x,y]_N - u[ux,y]_N - u[x,uy]_N + [ux,uy]_N = 0 \tag{2}$$

Sous cette condition, l'expression de $[\ ,\ ]^{\{1)}$ *est donnée par*

$$\forall x,y \in S, [x,y]^{(1)} = u^{-1}[ux,uy]_R - u[x,y]_N + [ux,y]_N + [x,uy]_N \tag{3}$$

Démonstration. Nous introduisons la torsion de Nijenhuis de $u, T(u) : S \times S \to S$ définie sur $(S, [\ ,\ ])$ par : $T(u)(x,y) = [ux, uy] - u[ux, y] - u[x, uy] + u^2[x, y]$.

Remarquons tout d'abord que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in S$,

$$T(u)(x,y) = [(\lambda I + u)x, (\lambda I + u)y] - (\lambda I + u)(\lambda[x,y] + [ux,y] + [x,uy] - u[x,y]) \quad (4)$$

ce qui implique, lorsque $\lambda I + u$ est inversible,

$$(\lambda I+u)^{-1}[(\lambda I+u)x, (\lambda I+u)y] = \lambda[x,y]+[ux,y]+[x,uy]-u[x,y]+(\lambda I+u)^{-1}(T(u)(x,y)). \quad (5)$$

La démonstration utilise le lemme suivant.

Lemme. *Pour tout $x \in S$, ta projection de l'image par u de x sur S_N (resp. S_R) est égale à l'image par u de la projection de x sur S_N (resp, S_R), c'est-à-dire*

$$\forall x \in S, u\left(x_N\right) = (u(x))_N \text{ et } u\left(x_R\right) = (u(x))_R$$

Pour la famille $U_\lambda = \lambda I + u$, la contraction existe si et seulement si :

$\lim_{\lambda \to 0} (\lambda I + u)^{-1}[(\lambda I + u)x, (\lambda I + u)y]$ existe. D'après (5), cette limite existe si et seulement si : $\lim_{\lambda \to 0} (\lambda I + u)^{-1}(T(u)(x,y))$ existe.

D'après le lemme, cette condition est équivalente à la relation (2). D'autre part, d'après la définition et la relation (5),

$$\forall x, y \in S, [x,y]^{(1)} = [ux,y] + [x,uy] - u[x,y] + u^{-1}(T(u)(x,y))_R \quad (6)$$

car $T(u)(x,y) \in S_R$. D'après la relation (4),

$$\begin{aligned}[x,y]^{(1)} &= [ux,y] + [x,uy] - u[x,y] + u^{-1}\left([ux,uy]_R - u[ux,y]_R - u[x,uy]_R + u^2[x,y]_R\right)\\ &= [ux,y] + [x,uy] - u[x,y] + u^{-1}[ux,uy]_R - [ux,y]_R - [x,uy]_R + u[x,y]_R\\ &= [ux,y]_N + [x,uy]_N - u[x,y]_N + u^{-1}[ux,uy]_R\end{aligned}$$

ce qui démontre la relation (3).

Definition 3 $(S, [\ ,\ ])$ *étant une algèbre de Lie et u un endomorphisme de S, on note $[\ ,\ ]^u$ le crochet défini par $\forall x, y \in S, [x,y]^u = [ux,y] + [x,uy] - u[x,y]$ appelé, par abus de langage, crochet déformé de $[\ ,\ ]$ par u* [5].

L'équation (3) montre que crochet contracté et crochet déformé ont même projection sur S_N. En effet,

$$\begin{aligned}\forall x, y \in S, [x,y]_N^{(1)} &= [ux,y]_N + [x,uy]_N - u[x,y]_N\\ &= ([ux,y] + [x,uy] - u[x,y])_N = \left([x,y]^u\right)_N\end{aligned}$$

De plus, l'équation (6), expression du crochet contracté en fonction de la torsion de Nijenhuis, montre de façon triviale que sous la condition $T(u) = 0$, condition suffisante pour l'existence des crochets déformé et contracté, on a $\forall x, y \in S, [x,\ y]^{(1)} = [x,\ y]^u$.

Le crochet initial $[\ ,\ ]$ et le crochet contracté $[\ ,\ ]^{(1)}$ sont-ils compatibles, c'est-à-dire leur somme est-elle aussi un crochet de Lie ?

Pour tous x, y éléments de S, et tout t élément de $\mathbb{R}$, on pose : $[x,\ y]_{(t)} = [x, y] + t[x, y]^{(1)}$

$$\begin{gathered}\left[x, [y,z]_{(t)}\right]_{(t)} + \left[z, [x,y]_{(t)}\right]_{(t)} + \left[y, [z,x]_{(t)}\right]_{(t)} \\ = t\,([x, u^{-1}T(u)(y,z)] + [z, u^{-1}T(u)(x,y)] + [y, u^{-1}T(u)(z,x)] \\ +u^{-1}(T(u)(x,[y,z])) + u^{-1}(T(u)(z,[x,y])) + u^{-1}(T(u)(y,[z,x])))\end{gathered}$$

Cette égalité montre que sous la condition $T(u) = 0$, l'identité de Jacobi est vérifiée pour $[\ ,\ ]_{(t)}$, donc $[\ ,\ ]$ et $[\ ,\ ]^{(1)}$ sont compatibles. On retrouve le résultat énoncé dans [3], selon lequel crochet initial et crochet déformé sont compatibles car sous la condition $T(u) = 0$, crochet contracté et crochet déformé sont égaux.

D'une manière plus générale, nous montrons le

Théorème 2 *Sous la condition nécessaire et suffisante de contractibilité, crochet contracté et crochet déformé sont compatibles si et seulement si* $u^{-1}T(u)$ *est un cocycle de l'algèbre de Lie* $(S, [\ ,\ ])$.

Bibliographie

[1] *H. G. Heuser* Functional Analysis, Wiley, (1982).

[2] *E. Inonü, E.P. Wigner* On the contraction of groups and their representations, Proc. Natl.Acad. Sci. U. S. 39, (1953) 510–524.

[3] Y. *Kosmann-Schwarzbach, F. Magri* Poisson-Nijenhuis structures, Ann. Inst. H. Poincaré, 53, No 1, 1990, 35-81.

[4] *A. Nijenhuis, W. Richardson Jr.* Deformations of Lie algebras structures, J. Math. and Mech., 17, No. 1, 1967, 89-105.

[5] *M. Postnikov* Leçons de géométrie. Groupes et algèbres de Lie, Mir. Moscou, 1985.

[6] *M. Rainer* Topological classifying spaces of Lie algebras and the natural completion of contractions, Algebras, groups and geometry, 12, No. 4, 1995, 353-401.

[7] *E. J. Saletan* Contraction of Lie groups, J. Math. Phys. 2, (1961)1-21.

Naïma Bedjaoui
Département de mathématiques U.R.A - C.N.R.S (751)
Faculté des Sciences rue Jean Souvraz S.P 18 62307 Lens