Conditions d'existence de solutions pour l'équation du pendule simple.

Sandrine Tagni

Nous nous intéressons à l'équation du pendule simple et forcé. Ce système s'écrit

$$u''(t) + a^2 \sin u(t) = f(t) \text{ sur } [0,T], u(T) - u(0) = u'(T) - u'(0) = 0 \qquad (1)$$

où a est une constante, T est la période de l'oscillation et f est la force appliquée sur le pendule. Nous renvoyons à [3] pour plus de détails sur la construction du système. Nous étudions les conditions suffisantes d'existence de solutions périodiques non triviales pour le système (1). J. Mawhin et M. Willem [4, 5], ont étudié ce problème pour f de moyenne nulle. Nous appellerons moyenne de la fonction f sur $[0,\ T]$, le nombre :

$$M(f) = \frac{1}{T} \int_0^T \ f(s)ds.$$

Les solutions au système (1) correspondent aux points critiques de la fonctionnelle

$$J_f(u)) := \frac{1}{2} \int_0^T \ |u'(t)|^2 dt - a^2 \int_0^T (1 - \cos u(t))dt + \int_0^T \ f(t)u(t)dt.$$

définie sur H^1_T, l'espace de Hilbert des fonctions T-périodiques de H^1. Ils montrent que J_f a un minimum local strict u_1. Ils démontrent aussi que J_f satisfait les conditions du Théorème du col [1]. Il existe alors une deuxième valeur critique c_2 différente de $J_f(u_1)$.
Notons que si f est non identiquement nulle et de moyenne nulle alors les deux solutions ainsi obtenues, ne sont pas constantes.

Lorsque f n'est pas de moyenne nulle, la fonctionnelle J_f ne vérifie pas la condition de Palais-Smale classique : il faut en trouver une version adaptée à la situation. Nous considérons l'équation (1), où f est une fonction constante. On pose

$$u''(t) + a^2 \sin u(t) = \lambda \text{ sur } [0,T], u(T) - u(0) = u'(T) - u'(0) = 0 \qquad (2)$$

avec $\lambda \in R$.

1. Quelques conditions nécessaires d'existence de solutions non constantes

En intégrant la première équation du système (2) sur $[0,T]$, on constate que si $\lambda \in \{-a^2,\ a^2\}$ alors les seules solutions du système (2) sont $u \equiv \dfrac{\pi}{2} \bmod \pi$. Ce cas ne nous intéresse pas. De plus *si* u est solution de (2) , $-u$ est solution de

$$\begin{cases} u''(t) + a^2 \sin u(t) = -\lambda & \text{sur } [0,T], \\ u(T) - u(0) = u'(T) - u'(0) = 0. \end{cases}$$

Et il nous suffit d'étudier le système (2) avec $0 \leq \lambda < a^2$ On appelle H_T^1, l'espace de Hilbert de fonctions T-périodiques de H^1

Lemme *Si s est une constante quelconque et a est une constante telle que*

$$0 < a^2 \leq \frac{4\pi^2}{T^2},$$

l'équation :

$$u''(t) + a^2 \left\{ \sin(u(t) + s) - \frac{1}{T} \int_0^T \sin(u(\theta) + s) d\theta \right\} = 0 \text{ sur } [0, T],$$

$$\text{u}(T) - u(0) = u'(T) - u'(0) = 0. \ (*)$$

n'a pas de sotution différente de la solution nulle dans l'espace $\widetilde{H}_T^1$, des fonctions de moyenne nulle de H_T^1.

Il suffit de voir que la fonctionnelle associée à (*) est strictement convexe et atteint son minimum en $u = 0$ dans $\widetilde{H}_T^1$.

Théorème 1 *Si $0 < a^2 \leq \dfrac{4\pi^2}{T^2}$ et $|\lambda| < a^2$, alors l'équation (2) n'a aucune solution non triviale dans H_T^1. Démonstration* : L'équation (2) est équivalente au système suivant

$$\begin{aligned} \tilde{u} &:= u - M(u) \\ \tilde{u}'' + a^2 \left\{ \sin[\tilde{u} + M(u)] - \frac{1}{T} \int_0^T sin[\tilde{u}(\theta) + M(u)] d\theta \right\} &= 0 \text{ sur } [0, T], \\ \frac{a^2}{T} \int_0^T sin[\tilde{u}(\theta) + M(u)] d\theta &= \lambda, \\ \tilde{u}(0) - \tilde{u}(T) = \tilde{u}'(0) - \tilde{u}'(T) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

D'après le Lemme, pour chaque s fixé, l'équation

$$\begin{cases} \tilde{u}''(t) + a^2 \left\{ \sin(\tilde{u}(t) + s) - \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T \sin(\tilde{u}(t) + s) dt \right\} = 0 \quad \text{sur } [0, T] \\ \tilde{u}(0) - \tilde{u}(T) = \tilde{u}'(0) - \tilde{u}'(T) = 0 \end{cases}$$

a pour unique solution $\tilde{u} = 0$. Dans l'équation (3), on a

$$s = M(u).$$

De plus, les seules solutions de (2) sont les constantes s telles que $a^2 \sin s = \lambda$.

2. Analyse dans le plan des phases et méthode de variationnelle

Par une méthode du plan des phases, on cherchera des conditions suffisantes à l'existence d'une solution non constante, de l'équation (2). On vérifiera ensuite ces conditions suffisantes par une méthode variationnelle. L'intérêt de cette deuxième méthode réside dans le fait qu'elle peut s'appliquer au cas du pendule double (voir multiple).

Théorème 2 *Si on a*

$$|\lambda| < a^2, \ \frac{4\pi^2}{T^2} < \sqrt{a^4 - \lambda^2} \tag{4}$$

alors l'équation (2) admet une solution périodique non constante.

Démonstration du Théorème : On a vu plus haut, que l'on pouvait encore écrire λ de la façon suivante

$$\lambda := a^2 \sin \omega$$

avec $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}[$. La condition (4) devient

$$\frac{4\pi^2}{T^2} < a^2 \cos \omega.$$

Par une méthode de plan des phases, on démontre que si v est solution non constante de (2) , alors il existe une deuxième solution u de (2) dépendant de v telles que

$$u_0 := u(0) \in]\omega, \pi - \omega[, \text{ et } u'(0) = 0 \tag{5}$$

Ensuite, on va démontrer que si u est une solution non constante de (2) avec les conditions (5) alors il existe une fonction continue $H :] \ \omega, \pi - \omega[\to R$ telles que

$$H(u_0) = \frac{|a|T}{\sqrt{2}}, \lim_{u0 \to \pi - \omega} H(u_0) = +\infty, \text{ et } \lim_{u_0 \to \omega} H(u_0) = \frac{\pi\backslash^{7'}2}{\sqrt{\cos \omega}}.$$

- On en déduit que

$$\left] \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\cos \omega}}, \ +\infty \right[\subset H(]\omega, \pi - \omega[) \ .$$

Par conséquent, si $\dfrac{4\pi^2}{T^2} < a^2 \cos \omega$ alors il existe $u_0 \in] \ \omega, \pi - \omega[$ tel que

$$\frac{T}{\sqrt{2}} = H(u_0)$$

et la solution de (2) avec $u(0) = u_0, u'(0) = 0$ est périodique de période T.

Etudions le problème par la méthode variationnelle. Soit $J_\omega : H_T^1 \to R$, la fonctionnelle associée au système (2) définie par

$$J_\omega(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |u'(t)|^2 \, dt - a^2 \int_0^T (1 - \cos u(t)) dt + a^2 T M(u) \sin \omega.$$

Autrement dit, les solutions de (2) correspondent aux points critiques de J_ω. On commence par démontrer que ω et $\pi - \omega \bmod 2\pi$ sont les points critiques non constants de J_ω. Ensuite on démontre que J_ω vérifie une version modifiée de la condition de PaJais-Smale classique, [1], et J_ω satisfait les hypothèses du théorème du col [1]. Par conséquent, il existe une valeur critique $c_* := J_\omega(u_*)$ définie par

$$c_* := \inf_{A \in \mathcal{B}} \max_{u \in A} J_\omega(u)$$

où

$$\mathcal{B} = \left\{ \gamma \in C\left([0,1]; H_T^1\right); \gamma(0) = \pi - \omega \text{ et } \gamma(1) = -\pi - \omega \right\}$$

• Supposons que u_* est un point critique constant non isolé, alors il existe un autre point critique non constant.

• Supposons que u_* est un point critique isolé. On démontre que u_* est de type *mp*, [2], et que $\pi - \omega \bmod 2\pi$ n'est pas de type *mp*. Par conséquent, u_* est différent de $\pi - \omega \bmod 2\pi$. Ensuite, nous utilisons un résultat sur les indices de Morse des points critiques, de Hofer [2], pour démontrer que u_* a un indice de Morse strictement inferieur à deux. Or si $\dfrac{4\pi^2}{T^2} < a^2 \cos \omega$, l'indice de Morse de ω est supérieur ou égale à trois. Par consequent, u_* est différent de $\omega \bmod 2\pi$.

Finalement, si $4\pi^2 T^{-2} < a^2 \cos \omega$ alors il existe une solution non constante à l'équation (2) pour $\lambda := a^2 \sin \omega$

Bibliographie

[1] *A. Ambrosetti, P. Rabinowitz.* Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Functional Analysis, (14) :349-381, 1973.

[2] *H. Hofer.* The topological degree point of mountain-pass type. Proceedings of Symposia in Pure Mathematica, 45, Part 1 :501-509, 1986.

[3] *L.D. Landau, E. M. Lifshitz.* Mechanics. Pergamon Press, Addison-wesley publishing company edition, 1960. Volume 1 of Course of theoretical physics.

[4] *J. Mawhin.* The forced pendulum : A paradigm for nonlinear analysis and dynamical systems.Expositiones Mathematicae, (6) :271-287, 1988. Collection mathématiques appliquées pour la maitrise.

[5] *J. Mawhin and M. Willem.* Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum-type equations. Journal of differential equations, (52) :264-287, 1984

Sandrine Tagni
41, Rue du Dr Roux - 54500 Vandoeuvre-lès-Nancy
Sandrine.Tagni@loria.fr