Singularités normales d'équations $z^k - f(x,y) = 0$

Anne Pichon

Soit $f : \mathbb{C}^n, 0 \to C, 0$ un germe de fonction analytique à singularité isolée en l'origine de $\mathbb{C}^n$. Dans [6], J. Milnor démontre que pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, le germe d'hypersurface $f^{-1}(0)$ intersecte la $2n-1$-sphère $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ en une sous-variété différentiable close de dimension $2n-3$. Cette sous-vaxiété de $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$, notée K_f s'appelle l'*entrelacs algébrique* associé à f. On appelle *type topologique* de f la classe d'isotopie de l'entrelacs K_f dans $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$. D'autre part. on appelle *bord* du germe f la classe de difféomorphisme de la variété abstraite $f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$.

Si la topologie des germes analytiques de courbes planes (*i.e.* $f : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}, 0$) a déjà dévoilé ses secrets, en revanche, nombre de questions concernant la topologie des germes analytiques de surfaces complexes ($i, e.$ $f : \mathbb{C}^3, 0 \to$ C, 0) restent ouvertes. Parmi elles, nous nous intéressons à l'étude topologique des singularités normales de surfaces complexes d'équations $z^k - f(x,y) = 0$, où $f : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}, 0$ désigne un germe réduit et k un entier ≥ 2. Plus précisément, nous allons comparer la topologie du bord du germe analytique $z^k - f(x,y)$ et le type topologique de f.

Le point de départ de nos recherches est l'article [4], dans lequel H. Laufer étudie les singularités $z^2 - f(x,y)$. Il démontre notamment un théorème de finitude dont nous donnons ici un énoncé topologique :

Théorème ([4], 5.10) *Soit M une variéte différentiable de dimension trois. Il existe à type topologique près un nombre fini (éventuellement nul) de germes analytiques réduits $f : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}, 0$ tels que le bord du germe analytique $z^2 - f(x, y)$ soit homéomorphe à M. De plus, il existe un algorithme qui permet d'en dresser explicitement la liste.*

Nous obtenons le résultat suivant :

Ihéorème 1 *Soit M une variété différentiable de dimension trois, et soit k un entier ≥ 3. Il existe à type topologique près un nombre fini (éventuellement nul) de germes analytiques réduits $f : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}, 0$ tels que le bord L_f^k du germe analytique $z^k - f(x,y)$ soit homéomorphe à M. De plus, il existe un algorithme qui permet d'en dresser la liste.*

Ce résultat est l'analogue du théorème de finitude de H. Laufer pour les germes $z^k - f(x,y)$, où k est un entier fixé ≥ 3. Cependant, notre démarche est tout à fait différente de la sienne. En effet, l'étude de H. Laufer, qui s'appuie sur le procédé de résolution de Zariski, et son éventuelle généralisation à $k \geq 3$ par le procédé de résolution d'Hirzebruch-Jung, privilégie des méthodes de géométrie analytique, alors que le problème de finitude est de nature essentíellement topologique. C'est pourquoi nous prenons un point de vue très différent en mettant en évidence la topologie de la situation.

Nous démontrons ce théorème de finitude à partir des résultats d'une étude topologique de la 3-variété L_f^k dont voici les principales articulations :

Nous montrons qu'il existe un revêtement cyclique à k feuillets $R : L_f^k \dashrightarrow \mathbb{S}^3$ totalement ramifié au dessus de l'entrelacs algébrique K_f.

Dans [5], les auteurs décrivent la décomposition minimale de Waldhausen de $\mathbb{S}^3$ dont K_f est réunion de fibres de Seifert en fonction de l'arbre de résolution minimale de f. Soit T sa famille séparatrice de tores.

Cette décomposition de Waldhausen de $\mathbb{S}^3$ se relève via R en une décomposition de Waldhausen de L_f^k de la façon suivante : la famille séparatrice est $T' = R^{-1}(T)$, et les fibres de Seifert de $L_f^k \backslash T'$ sont les images réciproques par R des fibres de Seifert de $\mathbb{S}^3 \backslash T$. Nous décrivons explicitement cette décomposition de Waldhausen de L_f^k en fonction de k et de l'arbre de résolution minimale de f. De plus, nous remarquons qu'il s'agit de la décomposition minimale de L_f^k dont $K' = R^{-1}(K_f)$ est réunion disjointe de fibres de Seifert.

Ce qui achève l'étude topologique préliminaire.

Il devient alors naturel d'organiser la démonstration du théorème 1 comme suit : nous nous donnons une variété de Waldhausen M, et un entier k, et nous déterminons les éventuels germes $f : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}, 0$ tels que $L_f^k \cong M'$. L'étape essentielle est de localiser l'entrelacs $R^{-1}(K_f)$ dans M'. Apparaît alors la difficulté principale : si la famille de tores T' est la famille séparatrice minimale de $L_f^k \backslash K'$, en revanche il n'en est pas nécessairement de même pour la variété L_f^k (autrement dit, K' n'est pas nécessairement réunion de fibres de Seifert de la décomposition minimale de M). En effet certaines composantes de $L_f^k \backslash T'$ pourraient être des tores pleins ou des tores épaissis !

Mais nous assistons à un miracle :

Miracle : *En dehors d'une petite liste d'exceptions, qui apparaissent pour $k = 2$, la variété de Waldhausen L_f^k est réduite, et T' est sa famille séparatrice minimale.*

C'est pourquoi, le théorème 1 ne concerne que les entiers $k \geq 3$: dans ce cas, K' est réunion de fibres de Seifert de la décomposition minimale de M'.

La technique développée au cours de l'étude topologique préliminaire a d'autres applications que le théorème de finitude. En voici quelques unes :

1) Via la théorie de Plumbing Calculus de W. Neumann (voir [7]), nous donnons une méthode rapide et explicite pour obtenir le graphe de la résolution minimale des singularités $z^k - f(x, y) = 0$ où f est un germe réduit et k un entier ≥ 2.

2) Nous donnons une démonstration topologique très rapide du theorème d'Abhyankar suivant :

Théorème ([1]) *Soit* $f : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}, 0$ *un germe réduit de courbe plane. Alors la singularité de surface d'équation* $z^k - f(x,\ y) = 0$ *est quasi-rationnelle pour tout entier* $k \geq 1$ *si et seulement si* f *est le germe lisse ou le germe quadratique ordinaire.*

De plus, nous améliorons ce résultat en remplaçant la condition "pour tout $k \geq 1$" par "pour tout $k \geq 1$ sauf un nombre fini arbitrairement grand".

3) Nous montrons que les torsades de la monodromie associée à un germe de fonction holomorphe en un point p d'une surface complexe normale Z sont toutes de signe négatif. Dans le cas d'une fibration de Milnor, ce résultat est dû à P. Du Bois et F. Michel ([2]), et indépendamment à D. Eisenbud et W. Neumann ([3]). Mais à notre connaissance, ce résultat est nouveau pour une fibration de Lê qui n'est pas de Milnor, c'est-à-dire quand le point p n'est pas un point lisse de Z.

Bibliographie

[1] *S. Abhyankar*, On a question of Mumford, American Jounal of Math. 105 (1983) 1455-1479.

[2] *P. Du Bois et F. Michel*, The integral Seifert form does not determine the topology of plane curve germs, Journal of Algebraic Geometry **3** (1994) 1-38.

[3] *D. Eisenbud, W. Neumann*, Three dimensional link theory and invariants of plane curves singularities, Annals of Math. Studies, **110** (1985) 172p.

[4] *H. B. Laufer*, On normal two-dímensional double point singularities, Israel Journal of Math. **31** Nos 3-4 (1978) 315-334.

[5] *D. T. Lê, F. Michel, C. Weber*, Sur le comportement des courbes polaires associées aux germes de courbes planes, Compositio Mathematica, **72** (1989) 87-113.

[6] *J. Mitnor*, Singular points of complex hypersurfaces, Princeton University Press (1968).

[7] *W. Neumann*, A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves, Trans. Amer. Math. Soc. **268-2** (1981) 299-344.

[8] *A. Pichon*, Sur les singularités normales d'équations $z^k - f(x, y) = 0$. thèse, Université de Genève (1996).

Anne Pichon
Université de Genève, Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre, Case postale 240, 1211 Genève, Suisse
pichon@sc2a.unige.ch