Difféomorphismes hyperboliques des surfaces compactes et combinatoire des partitions de Markov

Emmanuelle Jeandenans

Ce travail contribue à l'étude des systèmes dynamiques hyperboliques des surfaces compactes. Plus précisément, on s'intéresse aux difféomorphismes de surfaces compactes qui préservent l'orientation et vérifient *l'axiome A* et la condition de *transversalité forte*. L'axiome A dit que l'ensemble des points *non-errants* $\Omega(f)$ est *hyperbolique* et égal à l'adhérence de l'ensemble des points périodiques, et pour tout couple (x, y) d'éléments de $\Omega(f)$, la tranversalité forte interdit toute tangence entre la variété stable de x et la variété instable de y (*cf.* par exemple [5] et [7]).

Un theorème classique de systèmes dynamiques (Anosov, Moser, Palis et Smale, Robbin, Robinson pour le sens direct ; Mañe pour la réciproque) justifie qu'on s'intéresse à cette classe d'applications : il établit l'équivalence entre les deux propriétés d'axiome A et de transversalité forte et la *stabilité C^1-structurelle* d'un difféomorphisme f de la surface S qui les vérifie. Sur la surface S, l'union de toutes les variétés stables et instables issues des points non-errants dessinent une sorte de "toile" irrégulière (au sens où certains "fils" sont isolés d'un côté), dont Poincaré, en 1899, avait eu l'intuition (mais la complexité de la figure l'avait rapidement effrayé) [6]. Le bord des "trous" de cette "toile" (ou, si l'on préfère, le contour du dessin), *i.e.* l'union des variétés invariantes transversalement isolées (d'un côté au moins) de l'ensemble non-errant $\Omega(f)$, joue un rôle important dans l'organisation du tracé. D'après un théorème de Newhouse et Palis [4], cette union est l'union d'un nombre fini de variétés invariantes toutes issues de points périodiques. Nous les appellerons *variétés invariantes bords* et *points périodiques bords*.

Le premier résultat présenté ici est motivé par un théorème de Thurston [2], qui dit qu'un difféomorphisme d'une surface fermée de genre au moins 2 possède, dans sa classe d'isotopie (homotopie parmi les difféomorphismes), un représentant particulier. Cet élément canonique, s'il n'est pas périodique et s'il ne préserve pas un système fini de courbes simples fermées deux à deux disjointes dans la surface, est *pseudo-Anosov* : il laisse invariants deux feuilletages transverses ayant même ensemble fini de singularités (qui sont des selles à au moins trois branches) et admettant chacun une mesure transverse invariante par holonomie, l'une contractée et l'autre dilaté par la dynamique. On genéralise la definition d'homéomorphisme pseudo-Anosov en notion d'homéomorphisme pseudo-Anosov avec points marqués si l'on autorise des singularités à une branche, appelées épines.

On remarque naïvement qu'en dehors des singularités, les feuilletages invariants mesurés transverses d'un homéomorphisme pseudo-Anosov ressemblent fortement à une structure hyperbolique. Pour suivre cette idée, considérons un difféomorphisme fC^1-structurellement stable en restriction à un "bon" voisinage d'une de ses *pièces* *basiques* : c'est un ouvert invariant et de topologie finie, appelé *domaine*, dont Bonatti et Langevin ont montré l'existence dans [1]. On montre alors que si le dessin de ses variétés invariantes (bords) ne présente pas de "bigone" (formé d'un segment stable et d'un segment instable) dont seules les extrémités sont des points de $\Omega(f)$ (nous appellerons ces bigones des *impasses*), f est le *dérivé* d'un homéomorphisme pseudo-Anosov : on retrouve f en "ouvrant" certaines des séparatrices issues des singularités de l'homéomorphisme pseudo-Anosov de la classe d'isotopie de f [1][3].

Théorème 1 *Soit f un difféomorphisme C^1-structurellement stable, préservant l'orientation, d'une surface compacte orientée S. Soient K une pièce basique et $\Delta(K)$ son domaine. Supposons qu'il n'existe aucune impasse associée à K. Il existe alors une surface compacte M, un homéomorphisme pseudo-Anosov avec points marqués φ de M et une application continue surjective π de $\Delta(K)$ dans M tels que*

$$\pi \circ f|_{\Delta(K)} = \varphi \circ \pi.$$

De plus, la semi-conjugaison π est injective sur les orbites périodiques sauf sur celles de type bord (qui sont en nombre fini).

Le programme de recherche où s'intègre ce travail avait pour but initial de comprendre d'un point de vue topologique les difféomorphismes C^1-structurellement stables des surfaces compactes afin, entre autre, de les classifier à conjugaison topologique près. Bonatti et Langevin ont construit un outil approprié à cette classification. Ce sont les *partitions de Markov géométrisées* : à la definition classique de partition de Markov, on adjoint une donnée géométrique qui est le sens dans lequel l'image d'un rectangle traverse un rectangle de la partition (de bas en haut ou réciproquement). Bonatti et Langevin ont montré comment associer des partitions de Markov géometrisées (dont les côtés des rectangles sont des segments de variétés stables ou instables) à un diffeomorphisme C^1-structurellement stable, et prouvé que si deux tels difféomorphismes admettaient une même partition de Markov géométrisée, ils étaient topologiquement conjugués [1]. Mais *a priori*, autant de difféomorphismes, autant de partitions ! Il faut encore, pour conclure ce travail de classification, définir une famille finie de partitions de Markov géométrisées modèles et donner un algorithme fini permettant de passer d'une partition quelconque décrivant un difféomorphisme donné à une partition de la famille de modèles.

Le problème de la synthèse étudié ici est le suivant : si l'on se donne une partition de Markov géométrisée, à quelle(s) condition(s) correspond-elle à un difféomorphisme C^1-structurellement stable d'une surface compacte (on dira dans ce cas qu'elle est *réalisable*) ? Une surface compacte est nécessairement de genre fini donc le genre minimal d'une surface contenant une partition réalisable et tous ses itérés doit être fini. Précisons cette condition nécessaire à la réalisabilité. Étant donnée une partition de Markov géométrisée T à n rectangles et d'application ϕ, on construit une suite de surfaces compactes à bord en collant, par la dynamique, un nombre croissant de copies de l'union des rectangles de la partition sur les n rectangles initiaux : $\mathcal{R} = \cup R_i \subset \mathcal{R}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{R}_m \cdots$ est égale à $\coprod_{i=0}^{m} \mathcal{R} \times \{i\}$ quotienté par $(x,i) = (\phi^{-1}(x), i+1)$. Soit g_m le genre de la surface $\mathcal{R}_m$. Si la partition de Markov géométrisée T est réalisable, la suite (g_m)ne doit pas tendre vers $+\infty$ mais se stabiliser au bout d'un nombre fini de collages (à préciser en fonction de n). On appellera la limite (finie ou non) de (g_m) le *genre de la partition de Markov géométrisée T*.

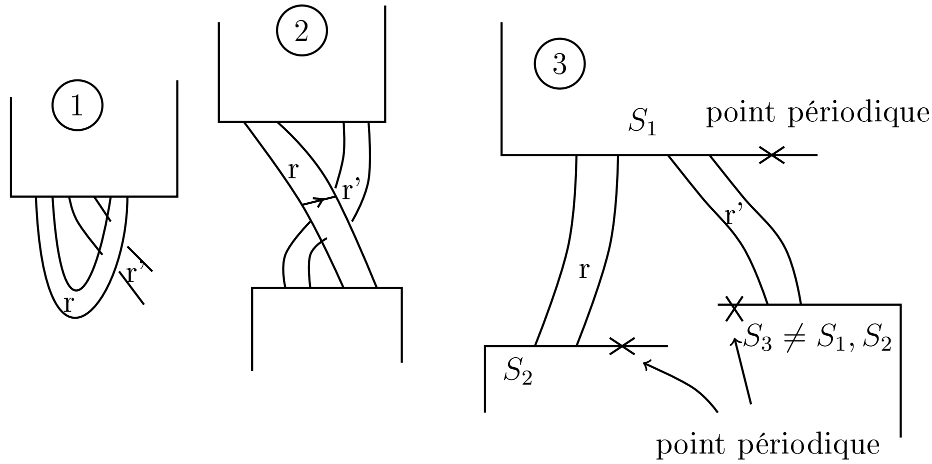

Figure 1: Les trois obstructions.

Une première étape pour répondre à la question donne une caractérisation des partitions de Markov géométrisées de genre fini, grâce à trois dessins topologiques (les *obstructions*, cf. la figure 1) qui ne doivent pas exister dans la surface $\mathcal{R}_{6n}$ [1] [3].

Théorème 2 *Soit T une partition de Markov géométrisée à n rectangles. On a équivalence entre*

1. *T est de genre fini, égal au genre de $\mathcal{R}_{6n}$;*
2. *$\mathcal{R}_{6n}$ ne présente aucune des trois obstructions.*

Une étude plus particulière des partitions à un rectangle donne que leur genre, s'il est fini, est nul, et on peut généraliser cette estimation en majorant strictement le genre d'une partition à n rectangles, s'il est fini, par $n(2n-1)$.

En résumé, nous avons vu qu'une partition de Markov géométrisée à n rectangles, si elle est réalisable, est de genre fini, ce qui équivaut à dire que la surface compacte à bord $\mathcal{R}_{6n}$, ne présente aucune des trois obstructions. Le résultat suivant apporte un élément de réponse au sens qui manque pour conclure (de genre fini $\Longrightarrow$ réalisable) [1] [3]

Proposition *Il n'y a pas d'obstruction topologique à ce qu'une partition de Markov de genre fini soit réalisable.*

Pour montrer ceci, on construit une surface compacte sans bord $\mathcal{M}$ contenant la partition et tous ses itérés par la dynamique, *i.e.* toutes les surfaces $\mathcal{R}_m \forall m \in \mathbb{Z}$, et un homéomorphisme de $\mathcal{M}$ qui prolonge la dynamique de la partition de Markov et qui possède seulement un nombre fini de points périodiques, tous attracteurs ou répulseurs hyperboliques, en dehors des rectangles initiaux de la partition. L'étude serait complète si cet homéomorphisme était un difféomorphisme ; on peut conjecturer que le résultat persiste dans ce cas, le trou actuel dans la démonstration étant le contrôle de l'hyperbolicité aux points périodiques situés sur le bord des rectangles.

Bibliographie

[1] *C. Bonatti, R. Langevin*, avec la collaboration de *E. Jeandenans* Difféomorphismes de Smale des surfaces, prépublication du laboratoire de topologie de Dijon (France), mars 96, soumis à publication à Astérisque

[2] *A. Fathi, F. Laubenbach, V. Poénaru* Travaux de Thurston sur les surfaces, Astérisque 67 (1979)

[3] *E. Jeandenans* Difféomorphismes hyperboliques des surfaces et combinatoire des partitions de Markov, thèse de l'université de Bourgogne, septembre 96

[4] *S. Newhouse, J. Palis* Hyperbolic nonwandering sets on two-dimensional manifolds, Dyn. Systems Peixoto ed. Salvador (1973), 293-301

[5] *J. Palis, W. de Melo* Geometric theory of dynamical systems, an introduction, Springer-Verlag

[6] *H. Poincaré* Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Les grands classiques Gauthier-Villars, librairie Blanchard

[7] *M. Shub* Stabilité globale des systèmes dynamiques, Astérisque 56 (1978)

Emmanuelle Jeandenans
IRMAR, Université de Rennes I
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes CEDEX