Propriétés spectrales de certains systèmes dynamiques en théorie ergodique. Produits croisés.

Mélanie Guenais

Présentation générale.

On s'intéresse aux systèmes dynamiques mesurables $(X,\ B, \mu, T)$, où $(X,\ B, \mu)$ est un espace de probabilité standard (c'est à dire qu'il est isomorphe à $([0,1], \mathcal{B}([0,1$ muni d'une mesure borélienne normalisée), et où T est une transformation de X dans lui-même telle que T est bijective, bimesurable sur un ensemble de mesure pleine, et T préserve la mesure μ : on a $T\mu = \mu$.

On regarde alors comment se comportent les itérées T^n de T sur X quand n varie, et on s'intéresse aux propriétés invariantes par isomorphisme de systèmes dynamiques (i.e. qui "transportent" les espaces en même temps que les mesures et les transformations). Parmi celles-ci les principales sont :

L'ergodicité. Le système est ergodique lorsque pour tout élément $A \in B, TA = A$ μ-presque partout entraîne $\mu(A) = 0$ ou 1. C'est une sorte d'irréductibilité du système. Cette propriété est aussi équivalente au théorème de Von Neumann : si A et B soot des éléments de $\mathcal{B}$ alors $\frac{1}{n}\sum_0^n \mu\left(T^k A \cap B\right)$ converge vers $\mu(A)\mu(B)$.

Le mélange. C'est une propriété de bonne répartition dans l'espace, plus forte que la précédente : le système est mélangeant si pour tous les ensembles A et B dans B, la quantité $\mu\left(T^n A \cap B\right)$ converge vers $\mu(A)\mu(B)$.

Ces propriétes dépendent en fait seulement du type spectral du système, que nous définissons maintenant.

Etude spectrale des systèmes dynamiques mesurables.

Considérons Un système $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, on peut lui associer un opérateur U_T défini sur $L^2(X)$ par $U_T f = f \circ T$. La théorie spectrale en théorie ergodique consiste alors à décrire les caractéristiques spectrales des opérateurs provenant des systèmes dynamiques.

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesurable, et U_T l'opérateur de $L^2(X)$ associé. $L^2(X)$ est un espace de Hilbert muni du produit $< f, g >= \int_X f\overline{g} d\mu$.

La mesure spectrale associée à une fonction f dans $L^2(X)$ est l'unique mesure σ_f sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ définie par sa transformée de Fourier par $\hat{\sigma}_f(n) =< U_T^n f, f >$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On établit alors un isomorphisme spectral entre l'espace cyclique fermé $[U_T, f]$ engendré par f sous U_T, muni de l'opérateur U_T, et $L^2(\sigma_f)$ muni de l'opérateur de multiplication $V\psi(x) = \mathrm{e}^{2i\pi x}\psi(x)$.

On définit maintenant le *type spectral maximal* de U_T comme la mesure σ de $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$, qui vérifie : il existe une fonction $f \in L^2(X)$ telle que σ soit la mesure spectrale associée à f, et telle que pour toute fonction g dans $L^2(X)$, on ait $\sigma_g << \sigma$. Le type spectral maximal est défini de façon unique, à une équivalence près. Nous n'utiliserons par la suite que le *type spectral* (maximal réduit) de U_T qui représente la plus grande des mesures spectrales associées aux fonctions de $L^2(X)$ d'intégrale nulle, que nous noterons encore σ.

Remarque. Les propriétés d'ergodicité et de mélange sont en fait des propriétés du type spectral du système. L'ergodicité signifie que le type spectral du système n'a pas de masse en 0, le mélange est équivalent à $\lim_{n\to\infty} \widehat{\sigma}(n) = 0$.

Enfin, on peut établir une décomposition spectrale de $L^2(X)$ sous la forme $L^2(X) = \oplus_{n>0}[U_T, f_n]$ où les mesures spectrales associées aux f_n, σ_n vérifient $\sigma_n << \sigma_{n-1}$, et σ_1 est le type spectral maximal de U_T. Soit $B_n \in \mathcal{B}$ tel que $\sigma_n \sim 1_{B_n}\sigma_1$, alors la *fonction de multiplicité* du système est définie σ_1-presque partout sur $[0,1]$ par $m = \sum_1^\infty 1_{B_n}$.

L'opérateur U_T est alors déterminé par σ et m. Nous dirons que U_T admet un spectre simple si $m = 1$.

Les produits croisés.

Definition. Soit T une rotation ergodique sur un groupe compact $(X, \mathbb{B}, \mu)$ muni de sa mesure de Haar normalisée, et $(G, \mathcal{G}, m)$ un groupe abélien compact muni aussi de sa mesure de Haar. On considère une application mesurable ϕ de X à valeurs dans G (qu'on appelle cocycle) ; alors la transformation associée à ϕ au dessus de T, appelée *produit croisé*, est la transformation T_ϕ sur $X \times G$ définie par

$$T_\phi(x, g) = (Tx, g + \phi(x)).$$

$(X \times G, \mathcal{B} \otimes \mathcal{G}, \mu \otimes m, T_\phi)$ définit alors un nouveau système dynamique mesurable. On étudie maintenant l'opérateur de $L^2(X \times G)$, U_{T_ϕ}, associé à T_ϕ. Comme G est compact, son groupe dual $\widehat{G}$ est discret, et on peut décomposer $L^2(X \times G)$ sous la forme $L^2(X \times G) = \oplus_{\chi \in \widehat{G}} L_\chi$, avec $L_\chi = \{f(x)\chi(y) \ , \ f \in L^2(X)\}$. Chaque L_χ est invariant par U_{T_ϕ}, et la restriction de celui-ci à L_χ est nnitairement équivalente à l'opérateur sur $L^2(X)$, V_χ, défini par $V_\chi f = \chi \circ \phi . f \circ T$. L'étude spectrale de U_{T_ϕ} se ramène alors à l'étude de la famille $(V_x)_{x \in \widehat{G}}$.

Plusieurs résultats concernant ces transformations ont été établis. En particulier H. Helson a montré dans [6] que le type spectral de V_χ est soit discret, soit continu et purement singulier (i.e. étranger à la mesure de Lebesgue), soit équivalent à la mesure de Lebesgue, et que la fonction de multiplicité est constante. Ceci simplifie significativement l'étude de ces systèmes.

Etude de la multiplicité spectrale dans le cas $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$.

Un autre résultat([11]) prouve la simplicité spectrale générique de ces produits croisés. Au contraire dans le cas où T est une rotation irrationnelle sur $X = \mathbb{T}$, [7] démontre que le type spectral est égal à la mesure de Lebesgue dès que ϕ est une fonction suffisamment régulière, et dont l'intégrale de la dérivée est non nulle. Ceci entraîne la multiplicité infinie de U_{T_ϕ}. En fait, pratiquement aucun résultat sur la multiplicité des opérateurs V_χ n'est connu, sauf dans les cas simples (si $\phi(x) = x$, la multiplicité vaut n avec $\chi(x) = \mathrm{e}^{2i\pi nx}$).

Un premier travail ([5]) a porté sur l'étude de cette multiplicité spectrale en fonction de la régularité du cocycle : j'ai pu établir les théorèmes suivants

Théorème 1 *Soit α un nombre irrationnel de $[0,1]$, et ϕ une fonction à variation bornée de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, alors la multiplicité spectrale de l'opérateur V défini sur $L^2(\mathbb{T})$ par $Vf(x) = e^{2i\pi\phi(x)}f(x+\alpha)$ est finie, majorée par* $\max(2, \dfrac{2\pi}{3}Var(\phi))$.

Théorème 2 *Soit α un nombre irrationnel de $[0,1], \phi$ une fonction absolument continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\beta = \int_0^1 \phi'(t)dt$. La multiplicité spectrale de l'opérateur V est finie, strictement inférieure à $|\beta|+1$ si β est non nul. Si $\beta = 0$, le spectre est simple.*

Nous pouvons remarquer que la seconde majoration est optimale dans les cas connus.

La preuve repose sur un corollaire du lemme de Chacon, qui permet de majorer la multiplicité spectrale en fonction de l'"espace" occupé par une suite de sous-espaces cycliques $H_n = [V, f_n]$ dans $L^2(X)$.

Corollaire *([2]) S'il existe une suite de sous-espaces fermés cycliques $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$* et $0 < c < 1$ *tels que pour toute fonction $f \in L^2(X)$ normée,* $\overline{\lim_{n\to+\infty}} d^2(f, H_n) \leq 1-c$, *alors V est de multiplicité finie $m < \dfrac{1}{c}$.*

Nous savons construire pour la rotation $Tx = x+\alpha$ pour $x \in \mathbb{T}$, des suites de sous-espaces cycliques qui satisfont le corollaire précédent : soit (q_n) la suite des dénominateurs de la fraction continue de α, et $\alpha_n = \min\{|q_n\alpha - p|, p \in \mathbb{N}\}$. Alors $(T^j\,[0,\alpha_n[)_{0\leq j<q_{n+1}}$ est un ensemble d'intervalles deux à deux disjoints (c'est une tour), dont la mesure totale converge vers $\lambda > 1/2$ (quitte à prendre une sous-suite). Comme α_n tend vers 0, toute fonction normée $f \in L^2$ vérifie $\left\|f1_{\cup T^j[0,\alpha_n[} - \pi_n f\right\|_2 \to 0$, où π_n est le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par les $1_{T^j[0,\alpha_n[}$ pour $0 \leq j < q_{n+1}$. Soit $f_n = 1_{[0,\alpha_n[}/\sqrt{\alpha_n}$; on a donc l'inégalité $d^2(f, [U_T, f_n]) \geq \|f\|_2^2 - \|\pi_n f\|_2^2$. Comme $\|\pi_n f\|_2 \sim \|f1_{\cup T^j B_n}\|_2$, il suffit de montrer la convergence de $\|f1_{\cup T^j B_n}\|_2$ vers $\lambda\|f\|_2$: c'est un résultat sur l'indépendance asymptotique des tours de la rotation. La suite d'espaces cycliques $[U_T, f_n]$ satisfait alors la condition du corollaire avec $c = \lambda$, et le corollaire suffit à montrer la simplicité spectrale pour T.

L'idée suivante consiste à considérer les espaces cycliques [V, f_n], pour vérifier la validité du corollaire. Comme pour la rotation on se restreint, à n fixé, au sous-espace H_n engendré par les fonctions f_n pour $0 \leq j < q_{n+1}$, et on cherche à minorer la norme de la projection sur H_n d'une fonction normée. Les expressions obtenues permettent de calculer explicitement cette borne dans le cas d'un cocycle affine $\phi(x) = \beta x$. Le cas absolument continu se fait en deux parties : on montre d'abord, en utilisant le théorème ergodique ponctuel, la simplicité spectrale de V quand $\int_0^1 \phi' d\mu = 0$ (ϕ est de degré 0). Dans le cas d'un cocycle de degré non nul, on décompose celui-ci en une somme d'un cocycle affine et d'un cocycle de degré 0, ce qui permet d'obtenir la même majoration que pour le cas affine. Enfin pour un cocycle à variation bornée, le calcul se fait directement, moins finement que dans les cas précédents.

Etude du type spectral dans le cas $G = \{0, 1\}$.

Ce cas est particulièrement intéressant si on étudie des systèmes à multiplicité 1 : en effet l'étude spectrale de U_{T_ϕ} est réduite à celle de l'opérateur U_T dont le spectre est simple et discret, et de l'opérateur V de $L^2(X)$ défini par $Vf = \mathrm{e}^{i\pi\phi} f \circ T$. Dès que V admet un spectre simple et continu, U_{T_ϕ} a pour multiplicité 1, et son type spectral est la somme des types spectraux de U_T et V. Dans le cadre d'un problème classique sur l'existence de transformations à spectre de Lebesgue simple, nous nous intéressons à une sous-question portant sur l'existence de systèmes de multiplicité 1, avec un type spectral à composante de Lebesgue. Nous allons utiliser ici une méthode permettant d'exprimer la mesure spectrale de V associée à 1, à partir d'une construction de T de façon récurrente : comme nous savons que le type spectral est soit purement singulier, soit égal à la mesure de Lebesgue, une seule mesure spectrale permet de donner la nature du type spectral. Etant donnée une suite d'entiers $(p_n)_{n\geq 0}$, et $h_{n+1} = p_n h_n (h_0 = \ 1)$, nous considérons T comme la rotation de 1 sur le groupe compact des entiers h_n-adiques, $X = \{x \ = \ \sum_{n\geq 0} x_n h_n, \ 0 \leq x_n < p_n\}$, muni de sa mesure de Haar μ (le système est appelé odomètre). Notons $B_0 = X$ et $B_n = \{x \in X, \ x_0 = .. = x_{n-1} = 0\}$, nous obtenons ainsi une suite de partitions $(T^j B_n, \ 0 \leq j < h_n)$ qui convergent vers la partition ponctuelle, et qui représente l'action de T sur X (c'est une suite de tours pour T). Nous construisons sur ces tours, des cocycles que nous appelons *cocycles de Morse*, à valeurs dans $\{0, 1\}$, et qui sont constants sur chacun des $T^j B_n$, pour $0 \leq j < h_n - 1$. Les produits gauches obtenus (qu'on appelle extensions de Morse) correspondent aux transformations provenant des suites de Morses généralisées de [8]. J'ai alors établi le résultat suivant ([4])

Théorème 3 *Il existe un cocycle de Morse avec un spectre de Lebesgue simple, et donc une extension de Morse admettant un spectre simple avec une composante de Lebesgue, si et seulement si il existe une suite de polynômes trigonométriques*

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{p_n - 1} \varepsilon_n(j) e^{2i\pi jx} \quad \text{sur } \mathbb{T}$$

où $p_n \geq 2$ et $\varepsilon_n(j) = \pm 1$ pour $0 \leq j < p_n$ et telle que $\|P_n\|_1 / \sqrt{p_n}$ converge vers 1.

Corollaire *Si (p_n) contient une sous-suite bornée, alors les extensions de Morse associées admettent un type spectral purement singulier.*

La preuve repose sur une expression explicite de la mesure spectrale, obtenue par une méthode utilisée dans [3] pour les transformations de rang 1.

Remarquons d'abord que $B_n = \cup_0^{p_n - 1} T^{jh_n} B_{n+1}$; comme ϕ est constant sur les $T^j B_n$ pour $0 \leq j < h_n - 1$, en notant $f_n = 1_{B_n} / \sqrt{\mu(B_n)}$, nous obtenons la relation de récurrence $f_n = \frac{1}{\sqrt{p_n}} \sum_0^{p_n - 1} \varepsilon_n(j) V^{-jh_n}(f_{n+1})$, où les $\varepsilon_n(j)$ sont des coefficients à valeurs ± 1, définis par les valeurs de ϕ sur la tour d'indice n. En posant $P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{p_n}} \sum_0^{p_n-1} \varepsilon_n(j) \mathrm{e}^{-2i\pi j h_n x}$ nous obtenons l'égalité $\sigma_{f_n} = |P_n|^2 \sigma_{f_{n+1}}$. Par suite nous établissons que la mesure spectrale associée à $f_0 = 1$ est égale à la limite vague des mesures $\prod_0^N |P_n|^2 \lambda$ quand N tend vers l'infini (qu'on appelle produit de Riesz generalisé). La condition du théorème vient d'une condition de singularité pour ces produits de Riesz généralisés donnée par J. Bourgain dans [1], énoncée de façon plus précise dans [9] : une telle mesure est purement singulière si et seulement si nous avons $\lim_{N\to\infty} \left\| \prod_0^N P_n \right\|_1 = 0$.

En utilisant la bonne répartition des fréquences des polynômes P_n, nous simplifions le critère précédent en le remplaçant par une condition sur la limite des $\|P_n\|_1$, ce qui conduit au théorème.

Bibliographie

[1] *J. Bourgain*. On the spectral type of Ornstein's class one transformations. *Israel J. of Math*, 84 :53-63, 1993.

[2] *R. V. Chacon*. Approximation and spectral multiplicity. In A. Dold, Heidelberg, and B. Eckmann, editors, *Contributions to ergodic theory and probability*, pages 18-27, Berlin, 1970. Springer.

[3] *J. Choski and M. Nadkarni*. The maximal spectral type of a rank one transformation. *Canad. Math. Bull.*, 37 :29-36, 1994.

[4] *M. Guenais*. Non singularity condition for Morse extensions. *submitted to Ergodic Th. and Dyn. Syst.*, 1997.

[5] *M. Guenais*. Une majoration de la multiplicité spectrale d'operateurs associés à des cocycles réguliers. *Preprint in Isr. J. of Math.*, 1997.

[6] *H. Helson*. Cocycles on the circle. *J. Operator Th.*, 16 :189-199, 1986.

[7] *A. Iwanik, M. Lemańczyk, and D. Rudolph*. Absolutely continuous cocycles over irrational rotations. *Isr. J. Math.*, 83 :73-95, 1993.

[8] *M. Keane*. Generalized Morse sequences. *Z. Wahr. Verw. Geb.*, 10 :335-353, 1968.

[9] *I. Klemes and K. Reinhold*. Rank one transformations with singular spectral type. *Preprint*, 1994.

[10] *M. Queffélec*. Substitution dynamical systems- Spectral analysis. In A. Dold and B. Eckmann, editors, *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1294. Springer-Verlag, 1987.

[11] *E.A. Robinson*. Non abelian extensions have nonsimple spectrum. *Compositio. Math*, 65 :155-170, 1988.

Mélanie Guenais
Mathématiques, Université Paris XIII
Avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse