Formes d'enlacement et invariants des 3-variétés.

Catherine Gille

1. Presentation de chirurgie des 3-variétés et matrices d'enlacement

Definition : Un *entrelacs* orienté à n composantes dans la 3-sphère S^3 est une sous-variété difféomorphe à n copies du cercle S^1. On le note $L = L_1 \cup \ldots \cup L_n$. Un *entrelacs parallélisé* est un entrelacs orienté tel que chaque composante L_i est munie d'un "framing" f_i, c'est-à-dire une classe d'isotopie d'une section de la projection $\partial N(L_i) \longrightarrow L_i (N(L_i)$ est un voisinage tubulaire de $L_i)$ dans S^3. On appelle *matrice d'enlacement* de l'entrelacs parallélisé L à n composantes la matrice entière symétrique $B_L = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ avec $b_{ij} = lk(L_i, L_j)$ si $i \neq j$ et $b_{ii} = lk(L_i, f_i)$.

Dans la suite, tous les entrelacs sont parallélisés, même si ce n'est pas précisé. A partir d'un entrelacs parallélisé L dans S^3, on peut construire par chirurgie une variété de dimension 3 orientée fermée connexe, notée $S^3(L)$. Explicitons la chirurgie : soit $N(L) = \bigcup_{i=1}^{n} N(L_i)$ un voisinage tubulaire de l'entrelacs L dans S^3. On oriente le tore-$\partial N(L_i)$ avec la convention "vecteur normal sortant = premier vecteur". On a alors :

$$S^3(L) = \left(S^3 \setminus \overset{\circ}{N}(L)\right) \bigcup_g \left(\coprod_{i=1}^{n} \left(D^2 \times S^1\right)_i \right)$$

où l'homéomorphisme de recollement $g : \coprod_{i=1}^{n} \partial \left(D^2 \times S^1\right)_i \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} \partial N(L_i)$ renverse l'orientation et envoie, pour tout $i = 1, \ldots, n$, le méridien m_i de $\partial(D^2 \times S^1)_i$ sur la longitude f_i. De plus, on dispose des deux résultats fondamentaux suivants :

Theorème [Lickorish [4]] *Pour toute 3-variété orientée fermée connexe M, il existe un entrelacs parallélisé L tel que M est homéomorphe à $S^3(L)$.*

Théorème [Kirby[3]] *Les variétés $S^3(L)$ et $S^3(L')$ sont homéomorphes si et seulement si les entrelacs L et L' sont reliés, à orientation près, par une suite finie de mouvements élémentaires de type :*

•*KI (stabilisation) : $L \longleftrightarrow L \cup L_{n+1}$ où L est un entrelacs à n composantes, L_{n+1} est une composante non nouée telle que $lk(L_{n+1},\ f_{n+1}) = \pm 1$ et L_{n+1} et L sont inclus dans deux boules disjointes,*

•*KII (glissement d'anse) : $L_1 \cup \ldots \cup L_n \longleftrightarrow L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1} \cup L'_k \cup L_{k+1} \cup \ldots \cup L_n$ ou' L'_k est la somme connexe de L_k, et f_l et $lk\left(L'_k, f'_k\right) = lk\left(L_k, f_k\right) + lk\left(L_l, f_l\right) + 2\eta lk\left(L_k, L_l\right)$ avec $\eta = +1$ si les orientations de L_k et L_l sont compatibles, $\eta = -1$ sinon.*

Par conséquent, si on a un invariant des entrelacs orientés qui est compatible avec les mouvements KI et KII et le changement d'orientation d'une composante, on obtient un invariant des 3-variétés.

Regardons ce qui se passe pour la matrice d'enlacement.

Soit L un entrelacs et L' l'entrelacs obtenu en changeant l'orientation de la composante L_k. Alors les éléments de la matrice d'enlacement $B_{L'}$ s'expriment en fonction de ceux de B_L de la manière suivante : $b'_{ij} = -b_{ij}$ si $i = k$ ou $j = k$ et $(i,j) \neq (k,k)$ et $b'_{ij} = b_{ij}$ sinon. On a donc $B_{L'} = {}^tSB_LS$ où $S = (s_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ est telle que $S_{ii} = 1$ si $i \neq k$, $s_{kk} = -1$ et $s_{ij} = 0$ dans les autres cas.

Soit maintenant L un entrelacs et L' l'entrelacs obtenu par glissement de la composante L_k sur la composante L_l. Alors on a : $b'_{ik} = b_{ik} + \eta b_{il}$ si $i \neq k$, $b'_{kk} = b_{kk} + 2\eta b_{lk} + b_{ll}$ et $b'_{ij} = b_{ij}$ si $i \neq k$ et $j \neq k$. Autrement dit $B_{L'} = B_L + \eta B_L E_{lk} + \eta E_{kl} B_L + b_{ll} E_{kk}$, où E_{ij} désigne la matrice carrée dont tous les éléments sont nuls excepté celui placé à la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne qui vaut 1. On a donc $B_{L'} = {}^t(I + \eta E_{lk}) B_L (I + \eta E_{lk})$.

Soit enfin L un entrelacs et L' l'entrelacs obtenu par stabilisation de L. Alors il est clair que : $B_{L'} = \begin{pmatrix} B_L & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

Ces considérations associées au théorème de Kirby conduisent à la définition et la proposition suivantes :

Définition : Soient B et B' deux matrices symétriques entières. On dit que B et B' sont *stablement équivalentes* si elles sont reliées par un nombre fini d'opérations du type :

$Q_1 : B \leftrightarrow {}^tSBS$ où S est une matrice carrée entière et $\det S = \pm 1$,

$Q_2 : B \leftrightarrow \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

Proposition *Soient L et L' deux entrelacs parallélisés tels que $S^3(L) \simeq S^3(L')$. Alors les matrices B_L et $B_{L'}$ sont stablement équivalentes.*

Autrement dit, la “classe d'équivalence stable de la matrice d'enlacement” est un invariant topologique des 3-variétés.

2. Formes d'enlacement

Définition : Une *forme d'enlacement* est un couple (G, λ) où G est un groupe abélien fini et λ une forme bilinéaire symétrique non-singulière sur G à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Les formes d'enlacement sont entièrement classifiées à isomorphisme près (Wall [10] et Kawauchi-Kojima[2]).

Soit B une matrice entière symétrique de taille n. On considère la suite exacte $0 \longrightarrow \mathrm{Ker} B \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{B} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, B \to 0$. On définit (Tors $(\mathrm{Coker} B), \lambda)$

forme d'enlacement associée à B de la manière suivante : soient u et u' éléments de *Tors*(*CokerB*). On suppose que $N'u' = 0$. Soient z et z' éléments de $\mathbb{Z}^n$ tels que $u = \delta(z)$, $u^l = \delta(z')$. Alors le système linéaire $N'z' = By'$ a une solution $y' \in \mathbb{Z}^n$ et on pose $\lambda(u, u') = \dfrac{1}{N'} t' z \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Remarquons que si B est inversible (dans $\mathbb{Q}$) $\lambda(u, u') = {}^t z' B^{-1} z$.

Théorème [Kneser-Puppe [4], Durfee[1], Kyle[5]] *Pour que deux matrices entières symétriques B et B' soient stablement équivalentes il faut et it suffit que* CokerB $\simeq$ CokerB' *et que leurs formes d'enlacement associées soient isomorphes.*

Toute 3-variété M possède une forme d'enlacement $(\mathrm{Tors}\, H_1(M, \mathbb{Z}), \lambda_M)$ définie comme suit. La suite courte exacte $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ induit une suite longue en homologie :

$\cdots \longrightarrow H_2(M, \mathbb{Q}) \to H_2(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H_1(M, \mathbb{Z}) \to H_1(M, \mathbb{Q}) \to \cdots$

Remarquons que $\mathrm{Im}\, \beta = \mathrm{Tors}\, H_1(M, \mathbb{Z})$. Pour deux éléments u et u' de $\mathrm{Tors}\, H_1(M, \mathbb{Z})$ on pose $\lambda_M(u,\ u^l) = u \cdot x' \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ où $x' \in H_2(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est tel que $u' = \beta(x')$ et où la notation $\cdot$ désigne la forme d'intersection.

Proposition *Pour tout entrelacs parallélisé L, la forme d'enlacement de $S^3(L)$ est la forme d'enlacement associée à la matrice d'enlacement B_L.*

3. Invariants de Murakami-Ohtsuki-Okada

Pour tout entrelacs parallélisé L, on pose pour tout $N \in \mathrm{N}^*$:

$$Z_N(L) = \left(\frac{G_N(q)}{|G_N(q)|}\right)^{-\sigma(B_L)} |G_N(q)|^{-n} \sum_{y \in (Z/NZ)^n} q^{t_y B_L y}$$

où n est le nombre de composantes de $L, \sigma(B_L)$ la signature de la matrice B_L (nombre de valeurs propres positives moins nombre de valeurs propres négatives), $q = e^{\frac{2i\pi}{N}}$ (respectivement $q = e^{\frac{i\pi}{N}}$) si N est impair (respectivement pair) et $G_N(q) = \sum_{k \in Z/NZ} q^{k^2}$ (somme de Gauss).

Proposition *$Z_N(L)$ ne dépend que de la classe d'équivalence stable de la matrice d'enlacement B_L.*

On obtient ainsi (en se rappelant la proposition 1) un invariant des 3-variétés connexes fermées orientées, noté $Z_N(M)$, en posant $Z_N(S^3(L)) = Z_N(L)$. Une autre conséquence importante de la proposition 3, associée à la proposition 2 et au théorème 3, est le résultat suivant :

Proposition *$Z_N(M)$ est déterminé par le premier nombre de Betti de M et la classe d'isomorphisme de la forme d'enlacement* $(\mathrm{Tors} H_1(M, \mathbb{Z}),\ \lambda)$.

Mon premier travail a été démontrer une réciproque de ce résultat, qui n'est que partielle, et dont l'énoncé est :

Théorème *Deux 3-variétés connexes fermées orientées M et M' ont même premier nombre de Betti et des formes d'enlacement isomorphes si et seulement si $Z_N(M) =$*

$Z_N(M')$ *pour tout* $N \in \mathrm{N}^*$ *et* $\mathrm{Tors}_2\, H_1(M,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Tors}_2\, H_1\,(M',\mathbb{Z})$.
Notation : Si G est un groupe abélien fini, p un nombre premier, G_p désigne la composante p-primaire de G.

Les outils de démonstration sont essentiellement la classification des formes d'enlacement et une formule d'inversion des sommes de Gauss démontrée dans [7]. Dans la perspective de me "débarrasser" de la condition sur la composante 2-primaire de l'homologie, j'étudie actuellement des raffinements (cohomologiques et spinoriels) des invariants de Murakami-Ohtsuki-Okada.

Bibliographie

[1] *Durfee A.H.*, Bilinear and quadratic forms on torsion modules. Adv. in Math. 25 (1977), 133-164.

[2] *Kawauchi K. and Kojima K.*, Algebraic classification of linking pairings on 3-manifolds. Math. Ann. 253 (1980), 29-42.

[3] *Kirby R.*, A calculus for framed links in S^3. Invent. Math. 45 (1978), 35-56.

[4] *Kneser M. and Puppe P.*, Quadratische Formen und Verschhngungsinvarianten von Knoten. Math. Z. 58 (1953), 376-384.

[5] *Kyte R.H.*, Branched covering spaces and the quadratic forms of links. Ann. of Math. 59 (1954), 539-548.

[6] *Lickorish W.B.R.*, A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. Ann. of Math. 76(1962), 531-540.

[7] *Mattes J., Polyak M. and Reshetikin N.*, On invariants of 3-manifolds derived from abelian groups. Quantum Topology, ed. Kauffman L. and Baadhio R., World Scientific (1993), 324-338.

[8] *MurakamiH., Ohtsuki T. and Okada M.*, Invariants of three-manifolds derived from linking matrices of framed links. Osaka J. Math. 29 (1992) 545-572.

[9] *Watt C.T.C.*, Quadratic forms on finite groups, and related topics. Topology 2 (1964), 281-298.

Catherine Gille
Département de Mathématiques, Université de Nantes,
2, rue de la Houssinière, BP 9220S, 44322 Nantes Cedex 3, France.
gille@math.univ-nantes.fr