Un théorème de Paley-Wiener pour les groupes de Lie complètement résolubles

Gayatri Garimella

Pour une fonction mesurable ϕ sur $\mathbb{R}^n$, la transformée de Fourier $\hat{\phi}$ est définie par

$$\widehat{\phi}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-ixy} dx$$

Soit ρ une représentation de groupe du Lie G ; on définit la transformée de Fourier à valeur dans les opérateurs par

$$\hat{\phi}_\rho = \int_G \phi(g)\rho(g)dg$$

où dg est la mesure de Haar sur G.

Le résultat principal de ce travail est le suivant.
Théorème : *Soient G un groupe de Lie complètement reśoluble connexe et simplement connexe de dual unitaire $\hat{G}$ et ϕ une fonction bornée, mesurable à support compact ($\phi \in L_c^\infty(G)$) . Supposons qu'il existe un sous-ensemble $E \subset \hat{G}$ de mesure de Plancherel positive tel que $\hat{\phi}_\rho = 0_f$ pour tout $p \in E$. Alors $\phi = 0$ presque partout sur G.*

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, la transformée de Fourier ordinaire $\hat{\phi}$ se prolonge comme une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$. Donc dès que $\hat{\phi}$ s'annule sur un ensemble dont la mesure de Plancherel est positive, $\hat{\phi}$ est nulle identiquement et donc $\phi = 0$. Mais dans un groupe de Lie, on travaille avec la transformée de Fourier à valeurs dans les opérateurs, qui ne prolonge pas comme une fonction holomorphe. Il faut dont utiliser des méthodes beaucoup plus sophistiquées. Ce théorème de Paley-Wiener a néanmoins été démontré pour les groupes de Lie nilpotents en traitant deux cas classiques. Il a été démontré par récurrence sur la dimension de G en utilisant la mesure de Plancherel explicite et la formule de Plancherel explicite [3].

La même question a été posée pour les groupes de Lie complètement résolubles. Les ingrédients utilisés dans la démonstration : description des orbites co-adjointes dans $\mathcal{G}^*$ dual de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G, mesure de Plancherel explicite et formule de Plancherel explicite se trouvent dans les travaux de B.N.Currey [2]. Les résultats de B.N.Currey sont des généralisations de ceux de L.Pukanszky [5]. Ce théorème a été démontré par récurrence sur la dimension de G.

Ici, on donne la démonstration de ce théorème pour le groupe $ax + b$. Pour plus de détails et pour la démonstration dans le cas général voir [4].

Exemple : Groupe $ax+b$

Considérons le groupe

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | a>0, b\in\mathbb{R}\right\}$$

On note

$$(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La multiplication des matrices donne

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1a_2, a_1b_2+b_1)$$

et l'inverse

$$(a,b)^{-1}=\left(a^{-1},-ba^{-1}\right)$$

Soit $H=(1,\ b)$ le groupe dérivé de G qui s'identifie à $\mathbb{R}$. Pour $y\in\mathbb{R}$, soit χ_y le caractère de H défini par $\chi_y((1,\ b))=e^{iby}$.

Remarquons que $(a,b)=(1,\ b)(a,\ 0)$. Soit $\rho_y=Ind_H^G\chi_y$ la représentation de G induite de χ_y. Cette représentation se réalise dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$. On sait que pour tout $y>0p_y$ est équivalente à ρ_1 et on notera ρ_+ la classe de ρ_1 ; de même si $y<0, \rho_y$ est équivalente à ρ_{-1} et on notera ρ_- la classe de cette représentation.

L'algèbre de Lie de G est l'ensemble des matrices

$$\mathcal{G}=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Dans la base

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $[X,Y]=Y$. Avec cette même base X et Y on a

$$Ad(a,b)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$$

De même dans la base $\{X^*,Y^*\}$

$$Ad^*(a,b)=\begin{pmatrix} 1 & ba^{-1} \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $\ell=\alpha X^*+\beta Y^*\in\mathcal{G}^*$, les orbites de G dans $\mathcal{G}^*$ sont le demi-plan $\beta>0$, le demi-plan $\beta<0$ et les points $(\alpha,0)$.

Soient $\mathcal{B} = \{X, Y\}$ la base de $\mathcal{G}$ définie plus haut, et $B^* = \{X^*,\ Y^*\}$ la base duale de $\mathcal{G}^*$. Il existe un ensemble $J = \{j_1, j_2\}$ de $\{1,\ 2\}$ et $M = \{j_2\}$ sous-ensemble de J, alors $V \subset \mathbb{R}^2, V =]\ 0, \infty[\times \mathbb{R}$. On a $W_D = (0)$ et W_M est engendré par le vecteur $\{X_{j_2}^* \ |j_2 \in M\}$.

Les ouverts U_+ et U_- sont les demi-plans définis ci-dessus de $\mathcal{G}^*$ et $U = U_+ \cup U_-$. Donc $a = 1$ et $\epsilon \in \{1,\ -1\}$.

Puisque il n'y a que deux orbites ouvertes, l'ensemble

$$W = \{\ell \in W_M \cap U || q_{j_2}(\ell) 1 = 1, j_2 \in M\}$$

la réunion de deux points de $\mathcal{G}^*$. On a $W_+ = W \cap U_+$ et $W_- = W \cap U_-$. Soit $\epsilon \in \{1,\ -1\}$. Dans ce cas l' ouvert de Zariski $\Lambda_{ell} = \Lambda_+$ ou $\Lambda_\ell = \Lambda_-$ de W_D qui se réduisent à un point.

Dans ce cas particulier on peut démontrer le théorème de Paley-Wiener par un calcul direct.

Soient $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(G)$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\phi}_{\rho_\ell} f\right)(t) &= \int_G \phi((a,b))\rho_\ell((a,b)) f(t) a^{-2} da db \\
&= \int_G \phi((a,b)) f\left((a,b)^{-1}(t,0)\right) a^{-2} da db \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} \phi((a,b)) f\left(\left(a^{-1}t, -ba^{-1}\right)\right) a^{-2} da db \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \phi((a,b)) f\left(\left(a^{-1}t, 0\right)\left(1, -bt^{-1}\right)\right) a^{-2} da db \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\int_{\mathbb{R}} \Delta(b)^{1/2} \phi((a,b)) \chi_y\left(\left(1, -bt^{-1}\right)\right) db\right) f\left(\left(a^{-1}t, 0\right)\right) a^{-2} da \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi^a(b) e^{-2i\pi byt^{-1}} db\right) f\left(\left(a^{-1}t, 0\right)\right) a^{-2} da \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^*} \hat{\phi}^a_{\chi_{yt}-1} f\left(\left(a^{-1}t, 0\right)\right) a^{-2} da
\end{aligned}$$

où $\phi^a(b) = \Delta(b)^{1/2}\phi((a,\ b))$ et $\Delta(b) = |\det(Ad(b))|$.

Remarquons que $\phi^a \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Par hypothèse on a $\hat{\phi}_{\rho p} = 0$ pour tout $\ell \in E$; d'après ces calculs ceci entraîne que pour presque tout $a > 0$ on a $\widehat{\phi}^a_{\chi_{yt}-1} = 0$ pour presque tout $t > 0$ et y fixé.

Alors comme $\phi^a \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$, $\hat{\phi}^a_{x_{y_t-1}}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $S, \widehat{\phi}^a_{\chi_{yt}-1}$ est nulle sur un ensemble dont la mesure de Plancherel $d\mu_1$ est positive donc d'après le théorème de Paley-Wiener classique on a $\phi^a = 0$, donc $\phi = 0$ presque partout sur G. Remarquons que d'après la théorie génerale, la mesure de

Plancherel sur W s'écrit

$$\begin{aligned} d\mu &= \frac{1}{(2\pi)^2}|\beta|(d\delta_+ + d\delta_-) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}|\beta| d\delta \end{aligned}$$

où $d\delta$ est la mesure ponctuelle.

Donc si E est un ensemble non négligeable pour la mesure de Plancherel $d\mu$, c'est l'ensemble constitué de par ρ_+ ou ρ_- ou $\{\rho_+, \rho_-$

Donc $\widehat{\phi^a_{\chi(\ell^t)}} = 0$ pour tout t et a dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie que $\widehat{\phi^a_{\chi(\ell^t)}}$ s'annule sur un ensemble de dual de $\mathbb{R}$ contenant une demi-droite. Cette ensemble est non-négligeable pour la mesure de Plancherel de $\mathbb{R}$. D'où une autre démonstration de ce résultat.

Bibliographie

[1] *P.Bernat et al*, Représentations des groupes de Lie résolubles, Paris : Dunod, 1972.

[2] *B.N. Currey*, An explicit Plancherel formula for completely solvable Lie groups, Michigan Math. Journal, 38 (1991) 75-87.

[3] *G. Garimella*, Un théorème de Paley-Wiener pour les groupes de Lie nilpotents, Journal of Lie theory, vol 5 (1995), 165-172.

[4] *G. Garimella*, Théorème de Paley-Wiener. Opérateurs différentiels invariants sur les groupes de Lie nilpotents, Thèse, Université de Poitiers, 1997.

[5] *L.Pukanszky*, On the characters and the Plancherel formula of nilpotent Lie groups, Journal of Func. Analysis 1 (1967), 255-280.

Gaytari Garimella
Mathématiques, Université de Poitiers
40, Avenue du Recteur Pineau, 86022 Poitiers.
gaya@mathrs.univ→poitiers. fr