Décomposition spectrale de 1-formes différentielles sur une surface de Riemann et series d'Eisenstein.

Thérèse Falliero

On considère une surface de Riemann hyperbolique M et Δ l'opérateur de Laplace, $\Delta = d\delta + \delta d, \delta = - * d*$, où $*$ est l'opérateur de Hodge. Δ agit sur l'espace $L^2(M)$ des 1-formes différentielles w de carré intégrable pour le produit scalaire

$$\langle w_1, w_2\rangle = 1/2 \int_M w_1 \wedge *\overline{w}_2$$

Lorsque la surface de Riemann est compacte, il existe une base hilbertienne orthonormée formée de 1-formes propres :

$$w = \sum_\lambda (w)_\lambda$$

où $(\ldots)_\lambda$ désigne la projection orthogonale sur le sous-espace associé à la valeur propre λ du spectre discret de Δ.
Lorsque M n'est plus compacte (par exemple $\underline{M} = \hat{M} - \{a\}$, avec $\hat{M}$ compacte), le laplacien possède un spectre continu, lié à des séries d'Eisenstein E_2, E_{-2} associées à la pointe de M et on a la formule de décomposition spectrale

$$w(z) = \sum_\lambda (w)_\lambda(z) + \frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle w, E(1/2+it,)_2\rangle\, E(1/2+it,z)_2 dt$$

$$+\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle w, E(1/2+it,)_{-2}\rangle\, E(1/2+it,z)_{-2} dt$$

On se propose ici d'établir cette formule et d'expliciter les séries d'Eisenstein qui entrent en jeu et d'en donner quelques proprietés. On pose ainsi les outils qui nous seront nécessaires pour étudier une dégénérescence des séries d'Eisenstein hyperboliques de Kudla et Millson ([1]).

On utilisera quelques notations :$Im(z)$ est la partie imaginaire de $z = x+iy, H$ est le demi-plan de Poincaré, $G = SL_2(\mathbb{R})$, $M = \Gamma\backslash H, \Gamma$ est un groupe fuschien de co-volume fini, sans points elliptiques. L'existence de pointes de M correspond à la présence d'éléments paraboliques dans Γ. Quitte à faire une conjugaison sur Γ, on peut supposer que ∞ est la pointe de M et que son stabilisateur est engendré par $\gamma_\infty : z \to z+1, \Gamma_\infty = \langle\gamma_\infty\rangle$.
La décomposition des 0-formes a été faite à l'origine par Selberg. On donne pour référence à la décomposition des 1-formes les livres de : T.Kubota ([2]), G.G.P.S. ([3]), H.Iwaniec ([4]), D.A.Hejhal ([5], [6]).
On interprète ici la décomposition des 1-formes en termes de fibré en sphères de M.

1.Le fibré en sphères de M

Le fibré en sphères $S(H)$ est paramétrisable par les coordonnées locales $(z,\ \zeta)$ où $z \in H$ et $\zeta \in \mathrm{C}, |\zeta 1 = y$ ([7]). Le groupe Γ agit sur $S(H)$ de la façon suivante, pour tout $\gamma \in \Gamma$: $\gamma : (z,\ \zeta) \to (\gamma z, \gamma^{l}(z)\zeta)$. On vérifie que $S(M)$ s'obtient en factorisant $S(H)$ par Γ. En notant θ l'argument du vecteur tangent ζ , on a une métrique invariante sous l'action de Γ :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \left(d\theta + \frac{dx}{y}\right)^2$$

La mesure associée est alors $d\mu = dV\dfrac{d\theta}{2\pi}$ où $dV = \dfrac{dxdy}{y^2}$. On a

Proposition 1 *$S(M)$ est une variété riemannienne de dimension S, isométrique à $\Gamma\backslash G$.*

On considère l'espace de Hilbert $L^2(S(M))$ muni du produit scalaire ([7]) :

$$\langle F, G\rangle = \int_{S(M)} F\overline{G}dV\frac{d\theta}{2\pi}$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on définit les sous-espaces fermés $H_m \subset L^2(S(M))$ de la façon suivante

$$H_m = \{G(z,\zeta) \in L^2(S(M)) | G(z,\zeta) = g(z)\zeta^m\}$$

alors on a la décomposition orthogonale : $L^2(S(M)) = \oplus_{m\in \mathrm{Z}} H_m$. De plus

Proposition 2 *Le laplacien associé à la métrique de $S(M)$ est*

$$-\Delta = y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) - 2y\frac{\partial^2}{\partial x \partial\theta} + 2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

Il admet une unique extension auto-adjointe à $L^2(S(M))$ encore notée Δ.

2.Décomposition spectrale de H_1

On appelle séries d'Eisenstein incomplètes les fonctions

$$E((z,\ \zeta)|\psi) = \sum_{\sigma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \psi(\sigma(z,\zeta))$$

avec $\psi((z,\ \zeta)) = \psi(y)\zeta, \psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^+)$. On note $\mathcal{E}(S(M))$ l'espace engendré par les $E((z,\ \zeta)|\psi)$. On obtient la décomposition orthogonale

Proposition 3

$$H_1 = \tilde{C}(S(M)) \oplus \tilde{\mathcal{E}}(S(M)\rangle$$

où le tilde désigne l'adhérence dans l'espace de Hilbert $L^2(S(M))$ et $C(S(M))$ l'espace des fonctions F de H_1, C^∞, bornées, telles que si $F(z,\zeta) = f(z)\zeta$, $\int_0^1 f(z)dx = 0$. On a le théorème suivant

Théorème 1 *Le spectre de Δ opérant sur $C(S(M))$ est discret.*

Pour effectuer la résolution spectrale de $\mathcal{E}(S(M))$, on note dans la suite $y(\sigma(z,\zeta),s)_1 = y(z)^{s-1}\zeta = y(z)^s e^{i\theta}$ et on donne la :

Définition 1 *On appelle série d'Eisenstein généralisée, la série définie par*

$$E((z,\zeta),s)_1 = \sum_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma} y(\sigma(z,\zeta),s)_1.$$

Elle est définie sur le fibré $S(M)$.

On a convergence absolue en tout $(z,\zeta) \in S(M)$ de cette série si et seulement si $Re(s) > 1$.

On utilise alors un théorème de prolongement des séries d'Eisenstein généralisées

Théorème 3 *Les séries d'Eisenstein généralisées admettent un prolongement méromorphe à tout le plan des s, sont holomorphes pour $Res \geq 1/2$ sauf en des pôles simples, indépendants de z sur* $]1/2, 1[$.

On obtient

Proposition 4

$$E((z,\zeta)|\psi) = \sum_{1/2<s_j<1} \hat{\psi}\,(s_j)\, u_{1j}(z,\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_{Res=1/2} \hat{\psi}(s) E((z,\zeta),s)_1 ds$$

où $\mathrm{u_{1j}}(z,\zeta)$ *est le résidu de* $E((z,\ \zeta),s)_1$ *en* $s = s_j$ *et* $\hat{\psi}(s) = \int_0^\infty \psi(y) y^{-s} dy$. D'où la formule de décomposition pour tout $F \in H_1$:

$$F(z,\zeta) = \textstyle\sum_j \langle F, u_j\rangle\, u_j(z,\zeta) + \sum_{1/2<s_j<1} u_{1j}(z,\zeta)\,\langle F, u_{1j}\rangle\, \|u_{1j}\|^{-2} + \frac{1}{4\pi i}\int_{Res=1/2} \langle F, E(.,s)_1\rangle\, E((z,\zeta),s)_1 ds$$

3.Formule de decomposition spectrale d'une 1-forme

Soit w une 1-forme différentiele sur $M, w \in L^2(S(M))$. Comme corollaire de tout ce qui précède, on a la décomposition spectrale suivante :

$$w(z) = \sum_j \langle w, v_j dz\rangle\, v_j(z)dz + \sum_j \langle w, \overline{v_j} d\overline{z}\rangle\, \overline{v_j(z)} d\overline{z}$$

$$+ \sum_{1/2<s_j<1} \langle w, v_{1j} dz\rangle\, \|v_{1j}\|^{-2}\, v_{1j}(z)dz + \sum_{1/2<s_j<1} \left\langle w, \overline{v_{1j}} d\overline{z}\, \|v_{1j}\|^{-2}\, \overline{v_{1j}(z)} d\overline{z}\right.$$

$$+\frac{1}{4\pi i}\int_{Res=1/2}\left\langle w, E(.,s)_1 \frac{dz}{y}\right\rangle E(z,s)_1 \frac{dz}{y} ds + \frac{1}{4\pi i}\int_{Res=1/2}\left\langle w, E(.,s)_{-1}\frac{dz}{y}\right\rangle E(z,s)_{-1}\frac{d\overline{z}}{y} ds$$

De plus on a la formule valable pour $Res \geq 1/2$:

$$\Delta_{Diff}\left(E(z,s)_1 \frac{dz}{y}\right) = s(1-s) E(z,s)_1 \frac{dz}{y}$$

Bibliographie

[1] *S.Kudlaf J.Millson*, Harmonic differentials and closed geodesics on a Riemann surface. Invent.Math. 54 (1979), 193-211.

[2] *T.Kubota*, Elementary theory of Eisenstein series, Halsted Press, New York (1973)

[3] *I.M. Gelfand, M.I. Graev and I.I.Pyatetskii-Shapiro*, Representation Theory and Automorphic Functions, W.B.Saunders Company (1969)

[4] *H.Iwaniec*, Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms, Biblioteca de la revista matematica iberoamericana (1995)

[5] *D.A.Hejhal*, The Selberg Trace Formula for PSL(2,$\mathbb{R}$) , Springer Lecture Notes 548 (1976)

[6] *D.A.Hejhal*, The Selberg Trace Formula for PSL(2,$\mathbb{R}$) , Springer Lecture Notes 1001 (1983)

[7] *S. Katok*, Closed geodesics periods and arithmetic of modular forms. Invent.Math. 80 (1985), 469-480.

Thérese Falliero
U.F.R. Mathématiques et Informatique
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex
falliero@math.u-bordeaux.fr