Sur un problème mathématique en mécanique des fluides

Renata Bunoiu

Ce travail porte sur les méthodes mathématiques en mécanique des fluides, en particulier sur l'écoulement dans des domaines de faible épaisseur.

On étudie ici l'écoulement d'un fluide à viscosité non linéaire dans un domaine de faible épaisseur, de l'ordre d'un petit paramètre strictement positif ε. Létude des fluides pour lesquels la viscosité est une fonction non linéaire de la vitesse du fluide est importante. Effectivement, dans la nature il y a plusieurs fluides de ce type, comme par exemple l'encre, les peintures, les graisses, les polymères. On travaille avec une loi générale pour la viscosité, comme dans [3]. Les conditions imposées sur la viscosité sont satisfaites en particulier par les lois de Cross, Williamson, Carreau.

L'étude mathématique a été faite sur deux modèles. Dans les deux cas on considère une équation du type Navier-Stokes dans un domaine de dimension trois. Dans le premier cas (exposé plus loin) on considère des conditions de Dirichlet non-homogènes au bord du domaine, les forces extérieures étant supposées nulles. Dans le deuxième cas, on considère des conditions de Dirichlet homogènes au bord du domaine, mais dans ce cas les forces extérieures sont non nulles.

La solution d'un problème analogue pour un fluide à viscosité linéaire est due à Assemien, Bayada, Chambat [1]. Le cas avec la viscosité linéaire donnée par la loi de la puissance (cas $r > 2$) a été traité par Bourgeat, Mikelič, Tapiéro [2] avec des conditions de Dirichlet non homogènes sur la frontière latérale du domaine.

Dans le premier cas traité, on démontre d'abord un résultat d'existence d'une solution pour le cas ε fixé. Ensuite on s'intéresse au passage à la limite ($\varepsilon \to 0$) qu'on ne traite que dans un cas moins général. On fait des hypoth'eses supplémentaires sur la géométrie du domaine et sur les valeurs de la vitesse sur le bord du domaine, comme dans [1]. On donne des estimations a priori et des résultats de convergence pour les nouvelles fonctions et ensuite le problème qui lie les limites de la vitesse et de la pression.

Dans le deuxième cas, on connaît grâce à [3] l'existence d'au moins une solution pour le cas ε fixé. On s'intéresse pour ce problème aux passages à la limite uniquement.

Dans certains cas particuliers de viscosité on retrouve, à la limite, le problème de Reynolds classique, comme dans [1]. Le système limite trouvé peut être découplé si on impose des hypothèses supplémentaires sur la viscosité du fluide.

Presentation du problème

On travaille dans le domaine tridimensionnel Ω_ε défini par :

$\Omega_e = \{(x_1,\ x_2, x_3)$ tek que $(x_{1:}x_2) \in \omega$ et $0 < x_3 < \varepsilon h(x_1, x_2$

où ω est un rectangle du plan et la fonction continue $h : \overline{\omega} \to \mathbb{R}_+$ vérifie $\alpha < h(x_1,\ x_2) < 1$, dans ω, avec $\alpha > 0$. On considère comme dans [1] un écoulement régi par l'équation de Navier-Stokes, mais ici on suppose que la viscosité est non linéaire. Soit μ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

$$\mu \text{ est continûment différentiable de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}_+ (H1)$$
$$\lim_{t\to\infty} \mu(t) = \mu_\infty > 0 (H2)$$
$$0 < m_0 = \inf_{t \in R_+} \mu(t) (H3)$$

$\exists E \subset \mathbb{R}+$ tel que $\mu'(t) \geq 0, \forall t \in E$ et $t|\mu'(t)| \leq \mu(t), \forall t \in \mathbb{R} + \backslash E.(H4)$.

On définit la viscosité non-linéaire du fluide comme dans [3] en fonction de la vitesse u par :

$$\mu(s(u)) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,$$

avec $s(u) = \sqrt{2D_{II}(u)}, D_{II}(u) = \dfrac{1}{2}D(u)D(u)^t, D(u) = \dfrac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$.

Soient $\Gamma_+^\varepsilon, \Gamma_-^\varepsilon, \Gamma_L^\varepsilon$ les faces supérieure, inférieure et latérale du domaine et $\Gamma^\varepsilon = \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$. L'application g^ε étant donnée, le problème est de trouver la vitesse u^ε et la pression p^ε qui vérifient :

$$-div(2\mu(s(u^\varepsilon))D(u^\varepsilon)) + u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \ (1)$$

$$div\ u^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon, u^\varepsilon = g^\varepsilon \text{ sur } \Gamma^\varepsilon \ (2)$$

De plus, on cherche une pression p^ε telle que :

$$\int_{\Omega_e} p^\varepsilon dx = 0. \quad (3)$$

On multiplie l'équation (1) par $v \in V^\varepsilon = \{\phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon) \,|div \phi = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon\}$ et on trouve :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu\left(s\left(u^\varepsilon\right)\right) D\left(u^\varepsilon\right) D(v) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon v dx = 0, \forall v \in V^\varepsilon. \quad (4)$$

On ajoute la condition de compatibilité suivante (ν étant la normale extérieure) :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} g^\varepsilon \nu d\sigma = 0. \quad (5)$$

Pour le cas ε fixé on démontre les résultats suivants :
Lemme *Soit $g \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon)$ vérifiant (5). Alors il existe $G^\varepsilon \in \mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)$ qui satisfait :*

$$\operatorname{div} G^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \quad G^\varepsilon = g^\varepsilon \operatorname{sur} \Gamma^\varepsilon \quad |G^\varepsilon|_{\mathbb{H}^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c\,|g^\varepsilon|_{1\leq 2,\Gamma^\varepsilon}$$

Théorème 1 *Si $g^\varepsilon \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon)$ vérifie la relation (5) et si G^ε vérifie la relation :*

$$|G^\varepsilon|_{\mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{m_0}{c_S^\varepsilon c_P^\varepsilon},$$

où c_S^ε est la norme de l'injection de $\mathbb{H}^1(\Omega_\varepsilon)$ dans $\mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)$ et où c_P^ε est la constante de Poincaré, alors le problème (2)-(5) a au moins une solution $u^\varepsilon \in \mathbb{H}^1(\Omega_\varepsilon)$. Il existe c^ε constante telle que :

$$|\nabla u^\varepsilon|_{\ 0,\varepsilon} \ \leq c^\varepsilon.$$

Etude du cas limite $\varepsilon \to 0$ pour la lubrification

Pour passer à la limite on fait le changement de variables $(y_1, y_2, z) = (x_1, x_2,\ x_3/\varepsilon)$. Le nouveau domaine et sa frontière sont notés par : $\Omega, \Gamma, \Gamma_+, \Gamma_-, \Gamma_L$ et les nouvelles inconnues sont : $\hat{u}^\varepsilon(y_1, y_2, z) = u^\varepsilon(x_1, x_2, x_3)$ et $\hat{p}^\varepsilon(y_1, y_2, z) = p^\varepsilon(x_1, x_2, x_3)$. On donne des conditions particulières pour la fonction g^ε comme suit :

$$g^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon, g^\varepsilon = (g_1, g_2, \varepsilon g_3) \text{ sur } \Gamma_-^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon,$$

où les fonctions g_1, g_2, g_3 sont indépendantes de ε et $g_3 = 0$ sur Γ_-^ε. De plus, on suppose :

$$\int_{\Gamma_L} g\nu d\sigma = 0$$

Théorème 2 *Quitte à extraire une sous-suite, on a les résultats suivants :*

$$\hat{u}^e \to u^* \textit{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \textit{ faible et } \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial z} \to \frac{\partial u^*}{\partial z} \textit{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \textit{ faible}$$

$$u_3^* = 0, \quad \int_0^{h(y)} \widehat{u}_i^\varepsilon(y,z)dz \to \int_0^{h(y)} u_i^*(y,z)dz \text{ dans } \mathbb{L}^2(\omega), i = 1, 2$$

$$div_y \int_0^{h(y)} u^*(y,z)dz = 0 \textit{ dans } \omega, \quad u^*(y,0) = (g_1, g_2, 0) \textit{ dans } \omega$$

$$\varepsilon^2 \widehat{p}^\varepsilon \to p^* \text{ dans } L_0^2(\Omega) \textit{ faible et } \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0$$

Par abus de notation posons $u^* = (u_1^*, \mathrm{u}_2^*, 0)$. Pour une application μ qui vérifie de plus :
(H5), $\mu = \mu(\beta^\varepsilon s(u))$, où β^ε est une constante dépendant de ε

on a :
Théorème 3 *Le couple* (u^*, p^*) *défini par le théorème 2 vérifie pour i=1,2 :*

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu^*\left(u^*\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\right)+\frac{\partial p^*}{\partial x_i}=0 \text{ dans } \Omega, \quad u_i^*=g_i \text{ sur } \Gamma_+\cup\Gamma_-$$

$$\mu^*\left(u^*\right)=\begin{cases}\mu\left(\beta\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\partial u^*}{\partial z}\frac{\partial u^*}{\partial z}}\right) & si\ \frac{\beta^\varepsilon}{\varepsilon}\to\beta<+\infty\\ \mu(0) & si\ \frac{\beta^\varepsilon}{\varepsilon}\to 0\\ \mu_\infty & si\ \frac{\beta^\varepsilon}{\varepsilon}\to+\infty\end{cases}$$

Bibliographie

[1] *A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat* Inertial effects in the asymptotic behavior of a thin film flow, Preprint nr.121, Equipe d'Analyse Numérique, Lyon-Saint-Etienne.

[2] *A. Bourgeat, A. Mikelič, R. Tapiero* Dérivation des équations moyennées décrivant un écoulement non newtonien dans un domaine de faible épaisseur, C.R.Acad.Sci.Paris, 316, Série I, p. 965-970, 1993.

[3] *D. Cioranescu* Quelques exemples de fluides newtoniens genéralisés, Math. topics in fluid dynamics, ed. J.F. Rodrigues-A. Sequiera, Pitman Research Notes in Math. nr.274, Longman Scientific and Technical, 1993, p. 132-168

[4] *V. Girault, P.-A. Raviart* Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 749, 1979.

[5] *J.-L. Lions* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

Renata Bunoiu
Université de Metz, Département des Mathématiques
B.P.80794, 57012 Metz, Cedex 1, France
bunoiu@poncelet.univ-metz.fr