Calcul fonctionnel harmonique dans une $\star$-a.l.m.c complète et dans une $\star$-a.b.m.c complète

Lamiâa Bourass

Introduction

Considérons une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ munie d'une involution continue. On cherche à donner un sens à $f(x)$ où x est un élément de $\mathcal{A}$ et f une fonction harmonique sur un ouvert Ω de C contenant le spectre $Sp_A x$ à valeurs dans $\mathcal{A}$. Dans [1], A. El Kinani a défini un calcul fonctionnel harmonique en proposant la définition suivante :

Définition 1 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire involutive,* Ω u*n ouvert de* $\mathbb{C}, z_0 \in \Omega$ *tels* que $\overline{\mathbb{D}(z_0, R)} \subset \Omega, (R > 0)$. *Soit x un élement de $\mathcal{A}$ avec $Sp_{\mathcal{A}} x \subset \mathbb{D}(z_0, R)$. Pour tout f dans $h(\Omega, \mathcal{A})$, l'élément $f(x)$ est donné par la formule intégrale de Poisson* :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=R} f(z) \Re e \left[(z + x - 2z_0) (z - x)^{-1} \right] \frac{|dz|}{R}$$

($h(\Omega, \mathcal{A})$ *deśigne l'espace des fonctions harmoniques sur Ω à valeurs dans $\mathcal{A}$*).

Cette définition s'étend à des classes d'algèbres plus générales, notamment les limites inductives d'algèbres de Banach involutives (algèbres bornologiques localement multiplicativement convexes complètes involutives au sens de [5], en abrégé $\star$-a.b.m.c. complètes) et les limites projectives d'algèbres de Banach involutives (algèbres localement multiplicativement convexes complètes involutives au sens de [6], en abrégé $\star$-a.l.m.c. complètes). Nous obtenons les résultats suivants :

Calcul fonctionnel harmonique dans une $\star$-a.b.m.c. complète

Soit $\mathcal{A}$ une $\star$-a.b.m.c. complète, on écrit $\mathcal{A} = \lim_{\longrightarrow} (A_i, I_{ji}, I)$ où $(A_i)_{i \in I}$ est système inductif filtrant croissant d'algèbres de Banach involutives unitaires et I_{ji} est l'injection canonique involutive définie de A_i dans A_j quand $i \geq j$. Soit $\tilde{I}_{ji}$ l'injection canonique de $h(\Omega,\ A_i)$ dans $h(\Omega, A_j)$. Le système $\left(h\left(\Omega, A_i\right), \tilde{I}_{ji}, I\right)$ est inductif ;on définit alors l'espace des fonctions harmoniques sur Ω à valeurs dans $\mathcal{A}$, noté $h(\Omega, \mathcal{A})$, la limite inductive algèbrique et bornologique des espaces $h(\Omega, A_i)$.

Théorème 1 *Soient $\mathcal{A}$ une* $\star$-a.b.m.c. *unitaire et complète et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Il existe une unique application $x \to \Phi_x$ et une seule qui associe à tout elément x de $\mathcal{A}$, dont le spectre est contenu dans Ω, un morphisme unitaire borné Φ_x de $h(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\mathcal{A}$ défini par :*

$$\begin{aligned} \Phi_x : h(\Omega, \mathcal{A}) &\longrightarrow \mathcal{A} \\ f &\longmapsto f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=R} f(z) \Re e \left[(z + x - 2z_0) (z - x)^{-1} \right] \frac{|dz|}{R} \end{aligned}$$

Le "spectral mapping theorem"

Definition 2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre munie d'une involution $\star$. On dit que $\mathcal{A}$ est hermitienne si $Sp_{\mathcal{A}}h \subset \mathbb{R}$, $\forall h \in H(\mathcal{A})$ $(H(\mathcal{A}) = \{h \in \mathcal{A} : h^\star = h \})$.*

Pour les éléments normaux (un élément x est dit normal si $xx^\star = x^\star x$) d'une algèbre bornologique stellaire non commutative, le "spectral mapping theorem" est vrai pour les fonctions harmoniques car ces dernières sont continues [5]. Il est aussi vrai pour les élements normaux d'une $\star$-a.b.m.c. complète et hermitienne et on a la proposition suivante :

Proposition 1 *Soient $\mathcal{A}$ une $\star$-a.b.m.c. unitaire complète et hermitienne, $z_0 \in \Omega$ tel que $\overline{\mathbb{D}(z_0, R)} \subset \Omega, x$ un élément normal dont le spectre est contenu dans $\mathbb{D}(z_0, R)$ et $f \in h(\Omega)$. Alors $Sp_{\mathcal{A}}\ f(x) = f(Sp_{\mathcal{A}}\ x)$.*

Extensions des résultats de Ky Fan [3]

Dans la suite, $|\,.\,|$ désigne la fonction de Ptàk définie par : $|x| = \rho_{\mathcal{A}}(xx^\star)^{\frac{1}{2}}$, $\forall x \in \mathcal{A}$ où $p_{\mathcal{A}}\ (x)$ est le rayon spectral de x. On s'intéressera aux classes des fonctions suivantes :

$B(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D}), |f(z)| < 1, \forall z \in \mathbb{D}\}$

$P(\mathbb{D}) = \{g \in H(\mathbb{D}), \quad \Re e g(z) > 0, \forall z \in \mathbb{D}\}$

où $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < 1\}$.

Proposition 2(Analogue du théorème de Ky Fan) *Soient $\mathcal{A}$ une* $\star$-a.b.m.c. *unitaire complète et hermitienne, $x \in \mathcal{A}$ tel que $|x| < 1$. Alors on a les deux assertions suivantes* :

1. $\forall f \in B(\mathbb{D})$, $|f(x)| < 1$.
2. $\forall g \in P(\mathbb{D})$, $\Re e g(x) > 0$.

Proposition 3 (Analogue du théorème de Von Neumann) *Soient $\mathcal{A}$ une $\star$-a.b.m.c. unitaire complète et hermitienne, x un élément de $\mathcal{A}$ tel que $|x| \leq 1, f$ une fonction holomorphe* au *voisinage du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$. Si $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$ alors $|f(x)| \leq 1$.*

Proposition 4 (Analogue du lemme de Schwarz) *Soient $\mathcal{A}$ une $\star$-a.b.m.c. unitaire complète et hermitienne, x un élément de $\mathcal{A}$ tel que $|x| < 1$. Soient f, g et h dans $H(\mathbb{D})$ tels que $f = g.h$ avec $|h(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{D}$. Alors*

$$g(x)^\star g(x) \geq f(x)^\star f(x) \tag{1}$$

$$|g(x)| \geq |f(x)| \tag{2}$$

Dans (1) *l'inégalité est stricte, si et seutement si, $g(x)^\star g(x) > 0$ et h n'est pas une constante. L'inégalité (2) devient une égalité, si et seulement si, soit $g(x) \in Rad(\mathcal{A})$, soit $g(x)$ est une constante.*

On remarque que la première assertion de l'extension du théorème de Ky Fan est un cas particulier du lemme de Schwarz, c'est-à-dire, le cas où g est égal à 1.

Calcul fonctionnel harmonique dans une $\star$-a.l.m.c. complète

Soit $\mathcal{A}$ une $\star$-a.l.m.c. unitaire complète, en utilisant les notations et la décomposition de A. E. Michael dans [6], on écrit $\mathcal{A} = \lim_{\longleftarrow} \left(A_i, \overline{\Pi}_{ij}, I\right)$ où $\overline{\prod}_{ij}$ et $\overline{\prod}_i$ sont respectivement les morphismes de transitions de $\mathcal{A}$ dans A_i et de A_j dans A_i quand $j \geq i$. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de deux variables réelles x et y. On dit que f est harmonique si elle est deux fois continûment différentiable et satisfait à la condition suivante :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\delta x^2} + \frac{\partial^2 f}{\delta y^2} = 0.$$

On designe par $h(\Omega, \mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur Ω à valeurs dans $\mathcal{A}$. Il est clair que $h(\Omega, \mathcal{A})$ muni des opérations habituelles est un espace vectoriel complexe. Soient $\overline{\prod}_i$ et $\overline{\prod}_{ij}$ respectivement les morphismes canoniques de $h(\Omega, \mathcal{A})$ dans $h(\Omega, A_i)$ et de $h(\Omega, A_j)$ dans $h(\Omega, A_i)$ quand $j \geq i$. Le système $(h(\Omega, A_i), \overline{\prod}_{ij}, I)$ est un système projectif ayant pour limite $h(\Omega, \mathcal{A})$. On munit l'espace $h(\Omega, \mathcal{A})$ de la topologie limite projective.

Définition 2 *Soient $\mathcal{A}$ une $\star$-a.l.m.c. unitaire complète, $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tels que $\overline{\mathbb{D}(z_0,\ R)}$ soit contenue dans Ω. Soit x dans $\mathcal{A}$ dont le spectre $Sp_{\mathcal{A}}x$ est contenu dans $\mathbb{D}(z_0, R)$. Nous noterons, si $f \in h(\Omega, \mathcal{A}), f(x)$ l'élément de $\mathcal{A}$ donné par :*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z=z_0|=R} f(z) \Re e \left[(z + x - 2z_0)\,(z - x)^{-1}\right] \frac{|dz|}{R}$$

Proposition 5 *Soient $\mathcal{A}$ une $\star$-a.l.m.c unitaire complète et hermitienne, x un élément normal de $\mathcal{A}$ dont le spectre est contenu dans $\mathbb{D}(z_0, R)$ et f dans $h(\Omega)$. Alors $f(Sp_{\mathcal{A}}\ x) = Sp_{\mathcal{A}}\ f(x)$.*

En utilisant le calcul fonctionnel harmonique défini précédemment, on montre que les Q-algèbres localement multiplicativement convexes unitaires involutives (en abrégé Q-$\star$-a.l.m.c) hermitiennes et complètes constituent un cadre général pour les résultats de Ky Fan énoncés dans [3].

Proposition 6 (Analogue du théorème de Ky Fan) *Soient $\mathcal{A}$ une Q-$\star$-a.l.m.c unitaire complète et hermitienne; x un elément de $\mathcal{A}$ tel que $|x| < 1$. Alors on a les deux assertions suivantes :*

1. $\forall f \in B(\mathbb{D})$, $|f(x)| < 1$.
2. $\forall g \in P(\mathbb{D}), \Re e g(x) > 0$.

Proposition 7(Analogue du théorème de Von Neumann) *Soient $\mathcal{A}$ une Q-$\star$-a.l. m.c unitaire complète et hermitienne, x un élément de $\mathcal{A}$ tel que $|x| \leq 1$ et f une fonction holomorphe au voisinage du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$. Si $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$ alors $|f(x)| \leq 1$.*

Proposition 8(Analogue du lemme de Schwarz)

Soient $\mathcal{A}$ une Q-$\star$-a.l.m.c unitaire complète et hermitienne, x un élément de $\mathcal{A}$ tel que $|x| < 1$. Soient f, g et h dans $H(\mathbb{D})$ tels que $f = g.h$ avec $|h(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{D}$. Alors :

$$g(x)^\star g(x) \geq f(x)^\star f(x) \tag{1}$$

$$|g(x)| \geq |f(x)| \tag{2}$$

Dans (1), l'inégalité est stricte si et seulement si $g(x)^\star g(x) > 0$ et h n'est pas une constante. L'inégalité (2) devient une égalité si et seulement si $g(x) \in Rad(\mathcal{A})$ où g est une constante.

Bibliographie

[1] *M. Akkar, A. Elkinani, M. Oudadess.* Calculs fonctionnels harmonique et analytique réel. J. Aan. Math. Quebec, 12 :151-169, 1988.

[2] *M. Akkar* Theorèmes de structures de certaines algèbres topologiques ou bornologiques et applications. C. R. A.-S. Paris, série A, 285 :549-552, 1977.

[3] *Ky Fan.* Analytic functions of proper contraction, Math. Zeitschrift, 160 :275-290, 1978.

[4] M. *M Fragoulopoulo* Symmetric topological algebras applications, Schriftenreihe des Mathematishen Instituts und des Graduiertenkollegs der Universität Münster, Mai 1993.

[5] *H. Hogbe-Nlend.* Les fondements de la theorie spectrale des algèbres bornologiques. Bol. Soc. Brasil. Math., 3 :19-56, 1972.

[6] *E. A. Michael.* Locally multiplicatively convex topological algebras, Mem. of the Amer. Math. Soc., 1952.

[7] *V. Ptak.* On the spectral radius *i*n Banach algebras with involution. Bull. London. Math. Soc., 2 :327-334, 1970.

Lamiâa Bourass
Université de Bordeaux 1 U.F.R. de Mathematiques
351, cours de la libération 33405 Talence cedex.
bourass@math.u-bordeaux.fr