Polynômes de Bernstein génériques et relatifs associés à une application analytique

Hétène Biosca

Cet exposé aborde essentiellement les deux thèmes suivants :

- les Singularités (et plus précisément la théorie de l'équisingularité, via la constance d'invariants topologiques associés à une déformation) ;

- les $\mathcal{D}$-modules (notamment par la connaissance de variétés caractéristiques).

Nous nous proposons de relier ces deux sujets, à l'aide de la notion de polynôme de Bernstein associé à une déformation. Ce concept a été introduit en 1972 par I.N. Bernstein afin de prolonger certaines *distributions*. Rappelons-en sa définition.

On appelle *polynôme de Bernstein* associé à la fonction analytique $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ le polynôme unitaire minimal non nul $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ réalisant une équation fonctionnelle du type $b(s)F^s \in \mathcal{D}[s]F^{s+1}$, où $\mathcal{D}$ est l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients analytiques et où F^s désigne la puissance (formelle) s-ième de F.

L'existence d'un tel polynôme a été établie par Bernstein et Kashiwara, puis Malgrange ([10]) et Kashiwara ([5]) lui ont donné ses "lettres de noblesse" dans la théorie des singularités , établissant un lien très étroit entre les racines de $b(s)$ et les valeurs propres de la monodromie agissant sur les groupes de cohomologie de la fibre de Milnor.

Par la suite, l'existence des polynômes de Bernstein a été géneralisée au cadre d'une application analytique $(F_1, \ldots, F_p) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$, i.e. il existe $B(s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{C}[s_1, \ldots,\ s_p] \backslash \{0\}$ tel que

$$B(\underline{s})F_1^{s_1} \cdots F_p^{s_p} \in \mathcal{D}[\underline{s}]F_1^{s_1+1} \cdots F_p^{s_p+1}, \quad (\underline{s} = (s_1, \ldots, s_p))$$

Dans [9], C. Sabbah décrit de plus le lieu des zéros d'un tel polynôme et en donne une interprétation geométrique.

Là-encore, ce concept se révèle intéressant, tant dans la théorie des distributions (*cf.* le comportement asymptotique de certaines intégrales oscillantes, [1]), que dans la théorie des singularités (*cf.* les cycles évanescents iterés, [9]).

Il est naturel de considérer une *version relative* de ces polynômes. Introduisons tout d'abord quelques notations. Soient X (resp. Y) un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{C}^k$) et $\pi : X \times Y \to Y$ la projection canonique. On notera $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_k)$ les coordonnées sur X et Y, puis $\frac{d}{dx} = (\frac{d}{dx1}, \ldots, \frac{d}{dx_n})$ et $\frac{d}{dy} = (\frac{d}{dy_1}, \ldots, \frac{d}{dy_k})$ les dérivations correspondantes. On considère $(F_1, \ldots, F_p)$ une application analytique sur $X \times Y$, *deformation* à k paramètres de l'application $(f_1, \ldots, f_p)$ définie sur X, au sens "$F_j(x, 0) = f_j(x)$".

Définition. *Un polynôme de Bernstein relatif*(à π) associé à la déformation $(F_1, \ldots, F_p)$ est un élément $B_{rel}(\underline{s}) \in \mathbb{C}[\underline{s}]\backslash\{0\}$ tel que

$$B_{rel}(\underline{s}) F_1^{s_1} \cdots F_p^{s_p} \in \mathcal{D}_{rel}[\underline{s}] F_1^{s_1+1} \cdots F_p^{s_p+1}$$

où $\mathcal{D}_{rel}$ est le sous-anneau de $\mathcal{D}$ constitué des opérateurs différentiels indépendants des dérivations par rapport aux paramètres y, i.e. $\mathcal{D}_{rel} = \mathbb{C}\{x, y\} < \frac{d}{dx} >$.

Un polynôme de Bernstein générique associé à $(F_1, \ldots, F_p)$ est un élément $B_{gen}(\underline{s}) \in \mathbb{C}[\underline{s}]\backslash\{0\}$ pour lequel il existe $h \in \mathbb{C}\{y\}\backslash\{0\}$ tel que

$$h(y) B_{gen}(\underline{s}) F_1^{s_1} \cdots F_p^{s_p} \in \mathcal{D}_{rel}[\underline{s}] F_1^{s_1+1} \cdots F_p^{s_p+1}.$$

Si l'existence des polynômes de Bernstein (absolus) est, comme on l'a rappelé, toujours assurée, la situation est tout autre pour les polynômes de Bernstein relatifs et génériques, ce qui nécessite d'introduire des hypothèses sur la déformation $(F_1, \ldots, F_p)$. Pour $p = 1$, un certain nombre de résultats dans cette direction ont été établis dans [6] et [7] : notamment l'existence du polynôme de Bernstein relatif de F a été caractérisée à l'aide d'une condition géométrique (dite de "non- caractéristicité") portant sur W_F, le conormal relatif de F, ou en termes de constance du nombre de Milnor μ si F est une déformation d'hypersurfaces à singularité isolée. Notre but est d'étudier cette version relative des polynômes de Bernstein dans le cadre général $p \geq 1$ (*cf.* [3], [4]).

Les méthodes employées relèvent à la fois de la théorie des $\mathcal{D}$-modules et de celle de l'équisingularité : concernant les $\mathcal{D}$-modules, la pierre angulaire est la connaissance de la variété caractéristique du $\mathcal{D}[\underline{s}]$-module $\mathcal{D}[\underline{s}] F_1^{s_1} \cdots F_p^{s_p}$, laquelle coïncide ([5]) avec le sous-espace analytique de $T^\star(X \times Y) \times \mathbb{C}^p$ égal à

$$W^{\#}_{(F_1,\ldots,F_p)} = \overline{\{(x, y, \sum_{l=1}^{p} \lambda_l dF_l, \lambda_1 F_1, \ldots, \lambda_p F_p t),\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p\}}$$

Concernant l'équisingularité, on utilise la caractérisation par les relations de dépendance intégrale de la constance du nombre de Milnor μ ou de celle, plus forte, de la suite $\mu^\star$ formée des nombres de Milnor de toutes les sections planes génériques (*cf.* [12], [13]). Nous montrons alors :

Théorème 1 *Soit* $(f_1, \ldots, f_p) : (\mathbb{C}^n{}_{,0}) \to (\mathbb{C}_{,0})$ *un germe analytique définissant une intersection complète à singularité isolée et soit une déformation analytique* $(F_1, \ldots, F_p) : (\mathbb{C}^{n+1}{}_{,0}) \to (\mathrm{C}_{,0})$.
S'il existe un ouvert de Zariski dense de l'espace des $(n - p)$*-uplets de formes linéaires définies sur* $\pi^{-1}(0)$ *tel que* $\forall (l_1, \ldots, l_{n-p})$ *dans cet ouvert, l'application* $(F_1, \ldots, F_p,\ l_1, \ldots, l_{n-p})$ *admet un polynôme de Bernstein relatif, alors la déformation* $(F_1, \ldots, F_p)$ *est à* μ^**-constant le long de la courbe lisse* $\{0\} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$.

Pour $p = 1$, nous obtenons une entière caractérisation de la constance de μ^* en termes d'existence de polynômes de Bernstein relatifs, mais aussi en termes de "non-caractéristicité" :

Proposition 1 *Soit* $F : (\mathbb{C}^{n+1}{}_{,0}) \to (\mathbb{C}_{,0})$ *une déformation analytique d'un germe d'hypersurface à singularité isolée. Il y a équivalence entre :*

(1) L'hypersurface $\pi^{-1}(0)$ *est non caractéristique pour l'espace* $W^{\#}_{(F,x_1,\ldots,x_{n-1})}$*, pour* $n-1$ *formes linéaires génériques* $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ *définies sur* $\pi^{-1}(0)$ *.*

(2) L'application $(F, x_1, \ldots, x_{n-1})$ *admet un polynôme de Bernstein relatif, pour* $n-1$ *formes linéaires génériques* $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ *définies sur* $\pi^{-1}(0)$ *.*

(3) La déformation F *est à* μ^**-constant le long de* $\{0\} \times \mathbb{C}$*.*

La condition (1) stipule, par définition, que

$$W^{\#}_{(F,x_1,\ldots,x_{n-1})} \cap \left(T^{\star}_{\pi^{-1}(0)}(X \times Y) \times \{0_{\mathbb{C}^n}\}\right) \subset T^{\star}_{(X\times Y)}(X \times Y) \times \{0_{\mathbb{C}^n}\},$$

ce qui revient à "écarter une direction" dans $W^{\#}_{(F,x_1,\ldots,x_{n-1})}$.

Dans le cas particulier de deux variables, mais sans hypothèse de singularité isolée, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 2 *Les propriétés suivantes sont équivalentes* ($n = 2$ et $k = 1$) :

(1) L'hypersurface $\pi^{-1}(0)$ *est non caractéristique pour* $W^{\#}_{(F_1,\ldots,F_p)}$*.*

(2) L'application $(F_1, \ldots, F_p)$ *admet un polynôme de Bernstein relatif.*

(S) L'application $(F_1, \ldots, F_p)$ *est une déformation équisingulière de* $(f_1, \ldots, f_p)$ *le long d'une section de la projection* π*.*

La condition (3) signifie, par définition, que la *fonction réduite* sous-jacente à $F_1 \cdots F_p$ est une déformation équisingulière de la fonction réduite sous-jacente à $f_1 \cdots f_p$, où la dernière notion d'équisingularité est "canonique" (car $n = 2$) : c'est "au choix" la constance du nombre de Milnor, la constance de $\mu^\star$, ou l'existence d'une résolution simultanée forte des singularités de la déformation ([13]).

Enfin, voici un théorème d'existence concernant les polynômes de Bernstein génériques ([2]) :

Théorème 2 *Soit* $(F_1, \ldots, F_p)$ *une déformation analytique à* k *paramètres de* $(f_1, \ldots, f_p)$ *. Elle admet un polynôme de Bernstein générique dans les trois situations suivantes :*
(1) Un paramètre i.e. $k = 1$.
(2) Singularité isolée : on suppose que toutes les sous-familtes d'applications de $(f_1, \ldots, f_p)$ *définissent des intersections complètes à singularité isolée.*
(2) Cadre (semi)-polynomial ; on suppose que $F_l \in \mathbb{C}\{y\}[x]$ *pour* $l = 1 \ldots p$*.*

La propriété (1), resp. (2), généralise un résultat de [2], resp. [6], qui concerne le cas $p = 1$.

Bibliographie

[1] *A. Bartet, H.M. Maire* Asymptotique des intégrales-fibres, Ann. Inst. Fourier 43, No.5, p. 1267-1299, 1993.

[2] *H. Biosca*, Sur l'existence de polynômes de Bernstein génériques, C.R.A.S. Paris, tome 322, série I, p. 659-662, 1996.

[3] *H. Biosca*, Caractérisation de l'existence de polynômes de Bernstein relatifs associés à une famille d'applications analytiques, C.R.A.S. Paris, tome 325, série I, p. 395-398, 1997.

[4] *H. Biosca*, Polynômes de Bernstein génériques et relatifs associés à une application analytique, Thèse de doctorat, Nice, Novembre 1996.

[5] *H. Biosca, J. Briançon, Ph. Maisonobe, H. Maynadier*, Modules différentiels et espaces conormaux associés à un morphisme, prépub. n^o 451 de l'Université de Nice, Mars 1996.

[6] *J. Briançon, F. Geandier, Ph. Maisonobe*, Déformation d'une singularité isolee d'hypersurface et polynôme de Bernstein, B.S.M.F., 120, p. 15-49, 1992.

[7] *J. Briançon, Y. Laurent, Ph. Maisonobe*, Sur les modules différentiels holonomes réguliers, cohérents relativement à une projection, C.R.A.S. Paris, 313, série 1, p. 285-288, 1991.

[8] *F. Geandier* : Déformations à nombre de Milnor constant : quelques résultats sur les polynômes de Bernstein, Compositio Math., 77, p. 131-163, 1991.

[9] *M. Kashiwara,* On the holonomic systems of linear differential equations, Invent. Math., 49, 1978.

[10] *B. Malgrange*, Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente, Astérisque 101-102, p. 233-267, 1983.

[11] *C. Sabbah*, Proximité évanescente II, Equations différentielles pour plusieurs fonctions analytiques, Compositio Math., 64, p. 213-241, 1987.

[12] *B. Teissier*, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, in Singularités à Cargèse, Astérisque 7-8, p. 285-362, 1973.

[13] *B. Teissier*, Résolution simultanée I et II, Séminaire sur les singularités des surfaces, Ecole polytechmque, 1976.

Hélène Biosca
University de Nice-Sophia Antipolis
Laboratoire J.A. Dieudonné, Parc Valrose, 06108 Nice, CEDEX 2
biosca@hera.unice.fr