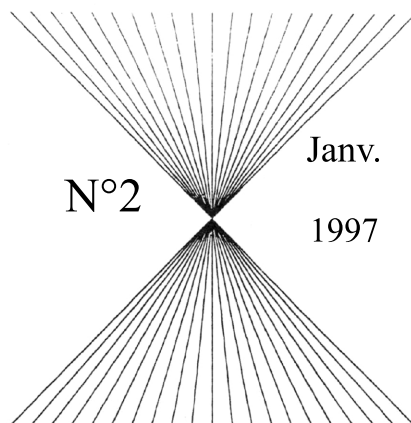


# *femmes & maths*



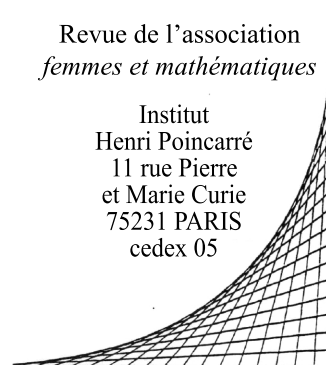
## *Sommaire*

Editorial  
Vie de l'Association  
A propos de *mathématiques*  
A propos de *femmes*



Revue de l'association  
*femmes et mathématiques*

Institut  
Henri Poincaré  
11 rue Pierre  
et Marie Curie  
75231 PARIS  
cedex 05









## EDITORIAL

La revue *femmes & math* s'articule autour de trois thèmes : Vie de l'association, A propos de mathématiques, A propos de femmes.

Notre association a eu de nombreuses activités en 1996. En plus du premier Forum des Jeunes Mathématiciennes dont le compte rendu fait l'objet d'un supplément à ce numéro 2, nous avons participé au Congrès Européen de mathématiques à Budapest et à la table ronde sur femmes et mathématiques organisée par Kari Hag. Nous étions présentes aux journées de l'APMEP à Albi et y avons animé un atelier. Nous avons organisé avec l'Association European Women in Mathematics un atelier sur la renormalisation en mathématique et en physique.

A propos de femmes.... C'est avec une très grande tristesse que nous parlons de Sandrine, jeune mathématicienne qui était venue nous rejoindre avec enthousiasme l'an dernier et qui n'est plus.

Les statistiques de recrutement en mathématiques dans l'enseignement supérieur sont alarmantes : nous constatons que, crise économique aidant, les mathématiciennes sont de moins en moins nombreuses, tout particulièrement au niveau des professeurs.

Dans ce paysage, plutôt sombre, les activités mathématiques, riches et nombreuses, de l'association sont à souligner. Les textes présentés ici correspondent aux exposés de l'année 1995-1996.

*Colette Guillopé*, présidente de l'association *femmes et mathématiques*



**Table ronde sur les Femmes et les Mathématiques**  
Congrès de la Société Mathématique Européenne, Budapest 96

**Introduction**

La proportion de femmes mathématiciennes varie considérablement d'un pays à l'autre. Cette table ronde a comme sujet principal Femmes et Mathématiques suivant le contexte culturel. Dans une vidéo de 20 minutes "Women and Mathematics - Does culture count?" des femmes qui ont étudié les mathématiques et travaillé comme mathématiciennes dans différents pays parlent de leurs expériences personnelles. Parmi les questions qu'elles évoquent :

- la relation entre le nombre de postes et la proportion des femmes ;
- les attitudes envers l'action positive ;
- les structures universitaires : titularisation précoce ou tardive ;
- l'importance d'une atmosphère amicale et encourageante, de modèles positifs ;
- l'influence des plans de carrière rigides ou flexibles ;
- les différentes conceptions du rôle des femmes dans la société et à l'intérieur des mathématiques
- l'utilité des réseaux de femmes mathématiciennes.

La vidéo est de cinq présentations courtes et d'une discussion générale animée par Ragni Piene, de l' Université d'Oslo, membre du Standing Committee d'European Women in Mathematics (EWM).

**Oratrices**

*Dusa McDuff.* Etudes à Edinburgh. PhD Cambridge 1971. Professeur à la State University de New York à Stony Brook. Membre de l'association américaine Association for Women in Mathematics.

*Kari Hag.* Etudes en Norvège. PhD University of Michigan 1972. Assoc. Professor à l'Université Norvégienne de Science et de Technologie. Membre du comité de l'European Mathematics Society (EMS) Women and Mathematics.

*Roswitha Maerz.* Etudes au Sudetenland. Diplôme de Mathématiques de l'Université de Léningrad. Dr.rer.nat 1970 et Dr.sc.nat 1978 Institute of Technology, Karl-Marx-Stadt. Professeur et Doyen à l'Université Humboldt, Berlin. Présidente de Deutscher Hochschullehrerinnenbund.

*Sylvie Paycha.* Etudes à Paris. Ph.D's Bochum 1988 et Paris 1990. Maître de Conférences à Strasbourg, puis Professeur à Clermont-Ferrand. Ancienne présidente de femmes et mathématiques. Responsable d'EWM.

*Vera Sós.* Etudes à Budapest. PhD à l'Université Eötvös Lorand 1957. Directrice de Recherche à l'Institut Mathématique de l'Académie Hongroise des Sciences. Professeur invité au Canada, en France, Allemagne et aux Etats-Unis. Membre élue à titre

étranger de l'Académie des Sciences d'Autriche. Vera Sós n'a malheureusement pas pu participer à la Table ronde.

### Pourcentage de femmes en mathématiques en Europe

Pays	Etudiants	PhD 1990	Mathématiciens	Prof
Allemagne	33%	9% ( 9/208)	3% (40/1500)	1 % (4/490)
Autriche	39%	14% ( 3/21)	7% ( 54/762)	0% ( 0/73)
Belgique	54%	38 (12/32) %	14% (30/219)	6% (8/134)
Bulgarie	40%	17% (4/23)	30% (254/855)	2% (1/42)
Danemark	30%	20% (1/5)	3% (4/121)	5% (1/19)
Espagne			16% (168/1075)	4% (12/279)
Estonie	60%	0% (0/4)	29% (32/109)	0% (0/8)
Finlande	41%	8%	2% (3/127)	3% (1/34)
France	30%	20-25 %	20%	10%
Géorgie	70%	4% (1/28)	40% (486/1217)	10% (7/72)
Grèce			24% ( 67/283)	5% (3/56)
Hollande	22%	5% (2/41)	4% (19/437)	1% (1/88)
Hongrie	15%	13% (5/38)	11% (32/281)	4% (4/103=)
Italie	70%		35% (609/1727)	13% (84/646)
Irlande	30%	67% (2/3)	5% (7/135)	0% (0/9)
Islande	33%	0% (0/0)	0% (0/10)	0% (0/4)
Luxembourg	24%		14% (1/7)	20% (1/5)
Norvège	20%	0% (0/5)	9% (9/103)	7% (3/45)
Pologne	60%	19% (3/16)	30% (107/359)	16% (7/44)
Portugal	50-60%		40-50%	5%
Royaume-Uni	31%	17% (46/266)	7% (97/1379)	31% (/267)
Russie	42%	10% (1/10)	12% (60/500)	3% (2/65)
Suède	30%	10% (1/10)	5% (7/150)	0% (0/21)
Suisse	25%	10% ( 4/42)	2% (3/141)	0% (0/91)
Ukraine	50%	33% (1/3)	21% (31/145)	3% (1/33)
Yougoslavie	60%	17% (4/24)	17% (91/530)	9% (12/132)

**Remarque** Ce tableau provient de Statistical data on Women Mathematicians in Europe - page 43, First European Congress of Mathematics, III, Round Tables, Birkhauser Verlag 1994, il a été mis à jour pour la France (chiffres 1996).

*Kari Hag, traduction femmes & math*



## Compte rendu de la Table ronde

Le deuxième congrès européen de mathématiques, qui s'est tenu à Budapest du 22 au 26 juillet 1996, rassemblait environ 700 mathématiciens/ennes. Il comportait huit exposés en session plénière, une trentaine en sessions parallèles et six tables rondes (contre une quinzaine au premier congrès qui s'est tenu à Paris en 1992) sur les thèmes suivants : publications électroniques en mathématiques, jeux mathématiques, démographie des mathématiciens, femmes et mathématiques, l'image publique des mathématiques, mathématiques et Europe de l'est, éducation.

Certaines de ces tables rondes étaient malheureusement programmées au même moment, ce qui a joué en défaveur de la table ronde sur les femmes et les mathématiques, qui avait lieu parallèlement à une table ronde sur les publications électroniques en mathématiques. Malgré tout, une cinquantaine de personnes étaient présentes (majoritairement des femmes) à la table ronde sur les femmes et les mathématiques organisée par Kari Hag (Trondheim, Norvège). La séance a débuté par une projection d'un film vidéo réalisé par Marjatta Naatanen (Helsinki, Finlande), film qui présente l'association EWM ainsi que quatre entrevues de mathématiciennes européennes tournées à Madrid lors de la dernière rencontre d'EWM. Les intervenantes de ce film sont (dans l'ordre d'apparition), Laura Fainsilber (Besançon), Marjorie Batchelor (Cambridge), Mara Neusel (Magdeburg), Isabel Labouriau (Porto). Afin de lancer le débat, Kari Hag a soulevé quelques questions qui se dégageaient des entrevues : Y a-t-il un rapport entre le statut du poste et la proportion des femmes qui l'occupent ? Faut-il encourager les initiatives pour l'égalité des chances et les actions privilégiant les femmes ? Les diverses structures académiques en Europe ont-elles une influence sur la proportion de mathématiciennes, en particulier l'âge moyen auquel s'obtient un poste permanent ? Une flexibilité dans la carrière est-elle envisageable et favorable aux femmes ? Y a-t-il corrélation entre la conception du rôle de la femme dans la société et la place de la femme dans les mathématiques ? Quel est l'importance des réseaux pour les mathématiciennes ?

Les quatre mathématiciennes participant à la table ronde se sont ensuite rapidement présentées :

- Dusa McDuff (Stony Brook, New-York), conférencière invitée pour un exposé en séance plénière (la seule femme sur huit conférenciers en séance plénière) a surtout évoqué son propre parcours de mathématicienne et a insisté sur la singularité de chaque parcours de mathématicienne.
- Roswitha Maerz (Humboldt, Berlin), invitée à présenter un exposé en séance parallèle (cinq mathématiciennes ont présenté un exposé, sur la trentaine d'exposés en séances parallèles), a commenté à l'aide de statistiques, certains des points évoqués ci-dessus.
- Kari Hag (Trondheim), qui organisait la table ronde, a insisté sur la disparité nord-sud quant à la proportion de mathématiciennes en commentant plus particulièrement le cas de l'Italie.

- Sylvie Paycha (Clermont-Ferrand) ; venue en tant que représentante de l'association femmes et mathématiques et coordinatrice d'EWM, j'ai présenté l'association femmes et mathématiques en commentant la situation des mathématiciennes en France par rapport à d'autres pays européens ainsi que mon propre parcours de mathématicienne. Du débat, qui était animé, se sont dégagés quelques éléments de réponse. Ont en particulier été évoqués
- l'importance des réseaux, surtout dans certains pays d'Europe de l'est (l'exemple cité étant l'Ukraine) où les mathématiciennes (et les mathématiciens en général) se trouvent parfois très isolés,
- les précautions à prendre quant aux mesures favorisant les candidatures féminines à des postes universitaires, mesures qui peuvent nuire aux candidates, surtout lorsque leur candidature est rejetée. Sont peut-être à encourager les actions en faveur des jeunes mathématiciennes en début de carrière, en privilégiant leur candidature à des post-doc, ainsi que les prix qui valorisent le travail de jeunes mathématiciennes (à ce propos, dix prix ont été décernés à de jeunes mathématiciens à l'occasion du congrès, dont un à une femme, Annette Huber (Muenster) pour son travail sur la théorie des motifs),
- la singularité des carrières de mathématiciennes, qui encore minoritaires, ont des curricula parfois peu comparables à ceux de leurs collègues masculins. Cette singularité peut jouer en leur défaveur, lorsque leur candidature est comparée avec celles de leurs collègues masculins à l'aide de critères classiques, comme le nombre de publications par rapport à l'âge. Se pose alors la question de la flexibilité de ces critères afin de tenir compte des interruptions momentanées de l'activité mathématique du ou de la candidate (congé parental par exemple),
- un exemple singulier et intéressant en Europe a été mentionné, celui de Malte, qui pourtant géographiquement situé dans le sud de l'Europe, est comparable quant à la proportion de femmes dans les mathématiques aux pays d'Europe du nord, ceci étant en grande partie dû au fait que son système éducatif est modelé sur le système britannique.

Bien que réussie au sens où elle a donné lieu à des échanges animés, cette table ronde a peut-être eu le défaut de ne pas être centrée sur un thème précis, ce qui aurait permis de mieux cibler le débat, tâche évidemment difficile lorsque les réactions fusent dans la salle ! Un objectif pour une prochaine table ronde serait de parvenir à concilier un aspect introductif au problème de la place des femmes dans les mathématiques pour un public non averti avec un débat plus pointu qui amène à de nouvelles questions et éléments de réponse autour de ce thème.

Sylvie Paycha

## **Journées de l'APMEP**

Albi, octobre 1996

Dans le prolongement du stand femmes et mathématiques que nous avons présenté en 1995 Grenoble, nous avons proposé cette année aux Journées d'Albi de l' Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) un atelier dont l'objectif était de sensibiliser les enseignant-e-s de mathématiques aux différences de scolarité des filles et des garçons. Vingt personnes ont participé à cette rencontre, qui s'est prolongée de manière informelle. En voici le compte rendu (à paraître dans le Bulletin Vert Spécial Albi de l' APMEP).

### **Le professeur de mathématiques et le parcours scolaire des filles et des garçons**

Cet atelier proposait d'observer les différences de parcours scolaire des filles et des garçons, d'analyser comment et pourquoi se mettent en place ces différences et de chercher des moyens d'y remédier. Nous n'avons pas de réponses toutes prêtes à proposer, mais des réflexions liées à l'observation de la répartition des élèves dans l'ensemble du système scolaire et aux résultats d'études réalisées par des sociologues de l'éducation et des didacticiens, dans différents pays et à tous les niveaux de scolarité.

#### **La situation actuelle**

On constate que la réussite des filles dans le système scolaire est globalement supérieure à celle des garçons. Cette réussite apparente cache une réalité beaucoup complexe : selon les niveaux et les types d'études, les proportions de filles et de garçons varient considérablement.

Les premières divergences de cursus apparaissent en fin de classe de cinquième et s'amplifient à tous les paliers d'orientation : choix des options, du type d'enseignement et des filières.

La proportion de filles en terminales scientifiques a augmenté jusqu'au début des années 1980 et diminué ensuite régulièrement.

Parmi les causes de ces divergences, on trouve des aspects sociologiques, culturels, psychologiques.

Dans la classe, certains mécanismes participent à la production de ces différences.

#### **Facteurs liés au contexte**

Parmi les facteurs ayant une influence on peut citer :

- le moment des choix d'orientation : il a été observé que retarder certains choix d'une ou deux années a permis moins d'abandons des disciplines scientifiques par les filles ;

- les contenus des programmes et leur traduction dans les manuels, qui font davantage référence à l'héritage culturel des garçons ;
- la connotation des disciplines : par exemple, en mathématiques, rigueur, logique et abstraction sont traditionnellement associées à des qualités masculines ;
- la composition du corps enseignant qui reflète la répartition des rôles sociaux ;
- les conceptions personnelles de l'enseignant-e : acteur/trice social-e, qui partage avec son milieu les conceptions du masculin et du féminin, celles sexuées des disciplines, des métiers et des futures contraintes sociales et familiales des élèves ;
- la mixité qui renforce les stéréotypes et dont il ne faut pas minimiser les effets.

### **Facteurs liés aux échanges**

#### *Interactions enseignants-élèves*

- Plusieurs études montrent que, dès le primaire, les filles ne reçoivent pas leur juste part de l'attention et des échanges avec les enseignant-e-s et que ceux-ci/celles-ci ne soupçonnent pas ces différences de traitement, ni leurs conséquences.
- La répartition des interactions est de l'ordre de 2/3 pour les garçons et de 1/3 pour les filles. Les bons élèves garçons sont plus souvent et plus intensément encouragés que les bonnes élèves filles.
- L'enseignant ou l'enseignante s'adresse généralement à la classe au masculin-neutre. Ces attitudes différenciées traduisent des effets d'attente et ont des conséquences sur l'évaluation.

#### *Interactions entre élèves*

- Les filles félicitent plus les garçons et les désapprouvent moins que l'inverse.
- La prise de parole est plus difficile pour les filles, qui se résignent au silence.
- En termes de résultats scolaires, les filles se comparent à l'ensemble des élèves de la classe, les garçons ne se comparent qu'aux autres garçons.

#### *Effets sur l'estime de soi*

- C'est vers 12-14 ans qu'apparaît une différence, selon le sexe, dans l'estime de soi. Moins reconnues et moins sollicitées, les filles se mettent à douter d'elles-mêmes.
- Comme leurs enseignants et enseignantes, les filles sous-estiment leurs résultats et sont moins persuadées de leurs compétences, surtout en milieu mixte.

Au cours de l'atelier, nous avons distribué un certain nombre de documents dont une bibliographie (disponibles au bureau de l'association).

*Annick Boisseau et Gwenola Madec*

**Compte rendu sur le groupe de travail :  
Renormalisation en mathématique et en physique**

Un groupe de travail sur le thème de la renormalisation organisé conjointement par les associations *femmes et mathématiques* et European Women in Mathematics s'est tenu à l'Institut Henri Poincaré les 14 et 15 juin 1996. Une vingtaine de mathématiciens/ennes et physiciens/ennes se sont réunis à cette occasion pendant deux jours et ont pu échanger leurs points de vue sur le concept de renormalisation, un concept difficile à cerner et qui est utilisé dans de nombreuses disciplines de la physique et des mathématiques. Les domaines représentés dans cette rencontre étaient :

- les systèmes dynamiques,
- la mécanique statistique,
- la mécanique quantique,
- la géométrie en dimension infinie.

Une préoccupation commune des participants/tes était de comprendre (ou de faire comprendre) les liens entre les diverses interprétations du mot renormalisation. Le caractère informel de cette rencontre, les efforts faits par les intervenantes pour rendre leur exposé accessible à des non spécialistes ainsi que le nombre restreint de participants/tes, ont permis de véritables échanges sur ce thème et par là d'éclaircir certains des liens entre les divers points de vue. Chacune des journées de cette rencontre était organisée autour de deux thèmes et comportait une discussion centrée autour des thèmes de la journée afin de tenter de dégager des traits communs aux interprétations de la notion de renormalisation présentées au cours des exposés. Voici le programme de ces deux journées :

- Méthodes de renormalisation dans les systèmes dynamiques et en mécanique statistique, *Annick Lesne* (Paris),
- Renormalisation de polynômes complexes, *Núria Fagella* (Barcelone),
- Renormalisation dans les systèmes du plan réel, *Laura Tedeschini-Lalli* (Rome),
- Le problème de la renormalisation dans des modèles populaires de théorie des champs, *Sheung Tsun Tsou* (Oxford),
- Notion de régularisation en renormalisation, groupes de renormalisation, *Annick Lesne* (Paris),
- Prolongements de la notion de régularisation à des notions géométriques en dimension infinie, *Sylvie Paycha* (Clermont-Ferrand),
- Discussion de synthèse notamment sur la renormalisation dans les systèmes dynamiques, échanges de points de vue.

Bien que ne pouvant prétendre avoir fait le tour de la notion si riche de renormalisation, nous espérons que cette rencontre aura permis de démystifier quelque peu cette notion et de la rendre accessible à certains/nes non spécialistes. Les actes de cette rencontre regroupant les textes des diverses interventions ainsi que quelques éléments de synthèse, seront disponibles au début de l'année 1997. Cette rencontre aura au moins

eu le mérite de permettre des échanges très fructueux entre les participants/tes et les intervenants/tes que je tiens à remercier vivement ici.

Sylvie Paycha  
(coorganisatrice avec Colette Guillopé)

### **Anneau noetherien**

D'après *Emmy Noether* (Erlangen 1882-Bryn Mawr 1935), fondatrice de l'algèbre moderne : théorie abstraite des anneaux, théorie des idéaux.

#### *Définition*

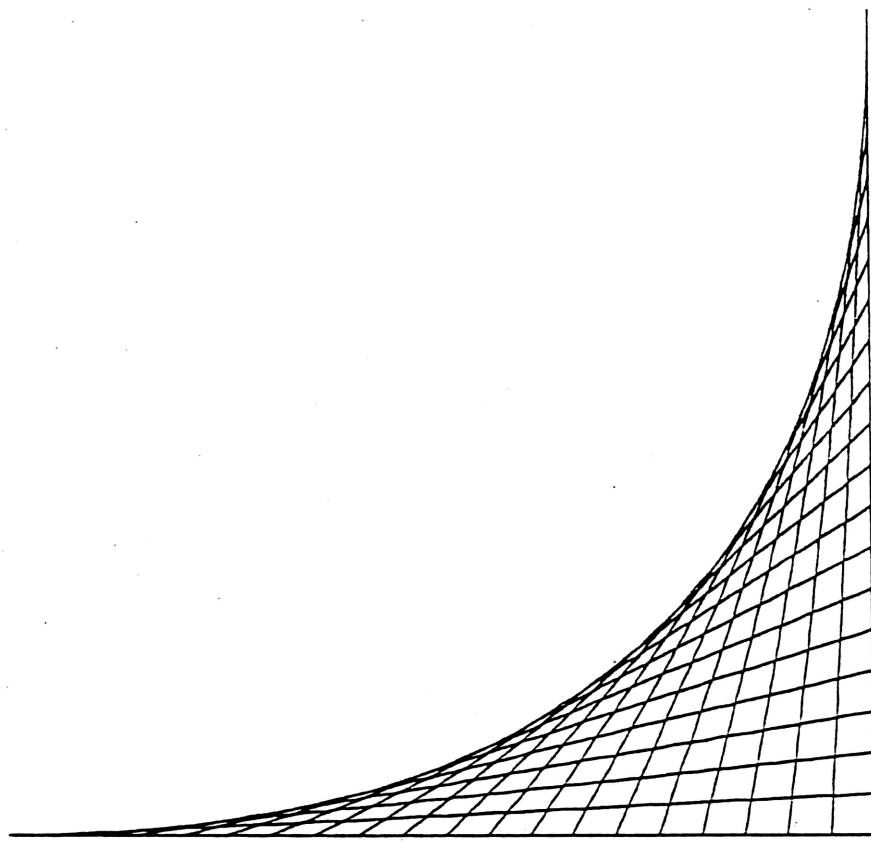
1. Anneau commutatif intègre dans lequel toute suite croissante d'idéaux est stationnaire. Exemples : l'anneau  $\mathbb{Z}$ , les anneaux de polynômes sur des corps ou plus généralement des anneaux noethériens.
2. Groupe de mathématiciennes de l'université de Californie à Berkeley, étudiantes de 3-ème cycle, postdoc, enseignantes ou chercheuses. Se réunit toutes les semaines, en général le jeudi de 17 H à 18 H, autour de rafraichissements et d'un exposé mathématique. Le plus souvent, c'est l'un des éléments du groupe qui présente son domaine de recherche aux autres, mais il arrive aussi que ce soit des mathématiciennes de passage.

Le groupe invite également des chercheuses confirmées à présenter un exposé au colloquium du département. Récemment, *Dusa McDuf*, *Ruth Charney*, *Leila Schneps*, *Lai-Sang Young* et *Margaret Wright* entre autres ont parlé de leurs travaux dans ce cadre. Autour des colloquiums, des pots et repas donnent l'occasion aux jeunes mathématiciennes de communiquer non seulement avec l'invitée, qui peut être une source d'inspiration, voire un modèle professionnel au-delà du doctorat, mais aussi avec les autres chercheurs et chercheuses du département.

Le groupe cherche maintenant à élargir son public aux étudiantes de mathématiques de 2-ème cycle, aux statisticiennes et informaticiennes, et aux mathématiciennes en visite au MSRI. Il essaye de rendre sa présence plus visible en invitant les nouvelles arrivantes dans le département à boire une bière ensemble au début de l'année, et en organisant un dîner de bienvenue, auquel ont participé vingt-trois femmes cette année. *Kashi Abhyankar* (kashi@math.berkeley.edu) s'occupe des exposés hebdomadaires; *Christine Heitsch* (heitsch@math.berkeley.edu), présidente, est responsable du colloquium. Consulter aussi nring@math.berkeley.edu, <http://math.berkeley.edu/nring>

*Laura Fainsilber*

# *A propos de mathématiques*







## Apprendre et enseigner une mathématique dynamique : enjeu scientifique et social

Annie Berté

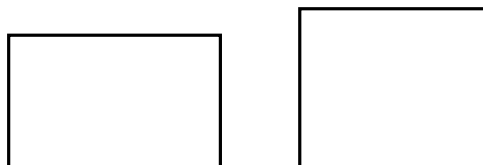
J'enseigne les mathématiques depuis 1970 et j'ai changé peu à peu mon enseignement à mesure que j'ai su créer les conditions pour donner la parole à mes élèves. J'ai alors compris que :

- les mathématiques ne leur apprennent pas à raisonner, ils/elles savent déjà. Tous les hommes et toutes les femmes possèdent les bases du raisonnement implicite. En revanche, elles peuvent leur apprendre à mieux exprimer et défendre leurs raisons, leur pensée.
- les mathématiques peuvent leur permettre d'enrichir les modèles et les représentations mentales qu'ils utilisent. Pour défendre et enrichir leur idées ils/elles doivent pouvoir les mettre à l'épreuve, les exprimer, les confronter à d'autres. Cela ne peut se produire dans n'importe quelle situation scolaire.

Je vais donner quelques exemples de situations qui m'ont permis d'entendre mes élèves, ce faisant de voir parfois les mathématiques d'une façon différente de celle dont je les avais apprises. J'ai travaillé depuis le début avec mon amie Emma Castelnuovo qui a enseigné toute sa vie dans une école secondaire à Rome, l'équivalent de notre collège, et qui m'a donné les ficelles du métier.

*Exemple 1 :*

Avec un bout de ficelle noué, je fabrique deux rectangles de même périmètre.



Ces rectangles ont-ils la même aire ? Du cours moyen à la terminale, les élèves répondent en grande majorité oui, et ils donnent les arguments suivants :

(1) C'est la même ficelle donc l'aire ne peut s'échapper. De façon plus élaborée ils disent : C'est la même aire car c'est le même périmètre. Effectivement deux cercles, deux carrés, deux triangles équilatéraux de même périmètre ont aussi la même aire. Ces figures sont des modèles implicites pour cette réponse. C'est vrai pour toutes les figures qui restent semblables à elles-mêmes quand on change leurs dimensions. Ce n'est pas le cas des rectangles.

(2) Il y a compensation, ce qu'on perd dans le sens de la longueur on le gagne dans le sens de la largeur. Effectivement il y a compensation sur la somme mais est-ce

vrai pour le produit ? J'ai trouvé des étudiants en mathématiques qui disaient : Mais pourtant il y a une relation entre somme et produit de deux nombres :

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy.$$

Donc si la somme est constante, le produit doit être constant. Je leur ai dit : mais il y a la différence  $x - y$  et ils m'ont répondu : Une différence, c'est comme une somme  $x + (-y)$  !

(3) Le professeur va jusqu'à la limite, où l'aire est nulle. Un élève de LEP dans la banlieue de Bordeaux a dit : Je le vois mais je ne peux le croire ! Certains essaient de prendre des mesures pour calculer, mais peu le font si aucune longueur de ficelle n'est fournie explicitement par le professeur.

(4) Pour sortir de la contradiction certains disent : L'aire est constante et tout d'un coup elle devient nulle, abandonnant ainsi la continuité de la transformation. D'autres disent : L'aire change quand ce n'est plus un rectangle. A la limite, nous avons un segment, et ce n'est plus un rectangle. Mais c'est déjà vrai avant la limite, quand la figure est très longue par rapport à la largeur. C'est une bande, ce n'est plus un rectangle ! Alors cela commence à diminuer

En 6ème, avant d'introduire la ficelle, nous demandons aux élèves de tracer sept rectangles de périmètre 18. Ils n'en trouvent que trois (2x7, 3x6, 4x5). Il y a un doute sur 1x8 (trop long) et 4,5 x 4,5 (carré). Effectivement dans certaines circonstances, en classe, un carré n'est pas un rectangle. Par exemple pour le calcul du périmètre, deux formules distinctes sont toujours utiles  $p = 4c$  ou  $p = 2(L + l)$ . Si un problème de géométrie commence par : Soit un rectangle ABCD ... il est fortement conseillé de ne pas faire la figure en traçant un carré. Il est normal que ce jeu subtil ne soit pas transparent au premier abord pour la majorité des élèves. Ce n'est pas une difficulté de raisonnement.

Le problème de la ficelle se poursuit ainsi. Nous avons une grandeur qui varie, d'où une fonction qui est l'aire mais quelle est la variable ? Il faut comprendre que les deux dimensions sont liées. Les élèves de 6ème découpent les rectangles de périmètre 18 qu'ils ont tracés et cherchent à les classer. Un classement selon une dimension, selon l'aire, ou selon la mesure de la diagonale, conduit à empiler les rectangles avec un sommet commun et à les placer dans un repère. Les quatrièmes sommets sont alignés, ce qui provoque la surprise, et donne du sens aux coordonnées. La symétrie par rapport à la bissectrice traduit l'involution :  $x \rightarrow k - x$ .

Pour l'aire, les élèves anticipent le maximum entre les deux zéros : l'aire augmente, passe par un maximum et diminue (Rolle). On obtient :

La symétrie par rapport à la bissectrice traduit l'involution :  $x \rightarrow k - x$ .

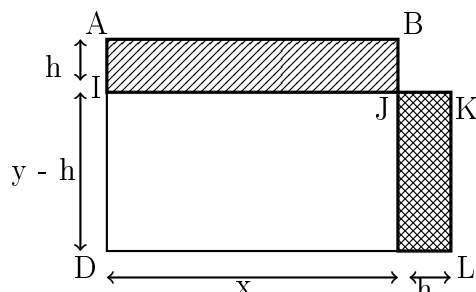
Pour l'aire, les élèves anticipent le maximum entre les deux zéros : l'aire augmente, passe par un maximum et diminue (Rolle). On obtient :

$$A(x) = x(k - x) = -x^2 - kx$$

d'où une parabole. La preuve du maximum s'obtient sans la dérivée :

$$F(X) = [(k/2) - X][(k/2) + X] = (k^2/4) - X^2.$$

Certains élèves reviennent à leur erreur initiale et protestent : Ce que j'ai dit était presque vrai ! Car vous m'avez tendu un piège, l'aire change très peu près du carré. Ils ont raison :



Je perds :  $xh$ . Je gagne :  $(y - h)h$ . On a

$$(x + h)(y - h) = xy + (y - x)h - h^2$$

L'accroissement est :  $(y - x)h - h^2$ . Si  $y - x = h$ , on a deux rectangles symétriques. La partie linéaire en  $h$  :  $y - x = k - x - x = k - 2x$  donne la dérivée. On retrouve pour  $h$  petit la faible variation autour du carré (quand  $y - x = 0$ , soit  $y = x$ ).

Le professeur peut poser le problème dual : variation du périmètre de rectangles d'aire fixe. On obtient deux hyperboles (une dimension fonction de l'autre, puis la variation du périmètre).

Certains élèves disent qu'ils ont vu le mot hyperbole en français, c'est une figure de style. En revanche, le mot parabole est inconnu, les paraboles de l'évangile n'éveillent aucun écho. Tous les élèves sont intéressés par l'origine grecque de ces mots. Apollonius de Perge comparait l'aire d'un rectangle de côtés  $x$  et  $1$  et l'aire d'un carré de côté  $y$  :

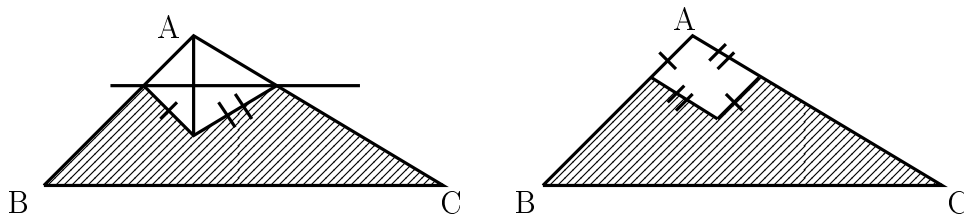
$y^2 = x$  est une parabole : mettre (bole) en comparaison (para),

$y^2 = x + a^2x^2$  est une hyperbole : mettre (bole) en plus (hyper),

$y^2 = x - a^2x^2$  est une ellipse : il manque, comme dans l'expression : une phrase elliptique.

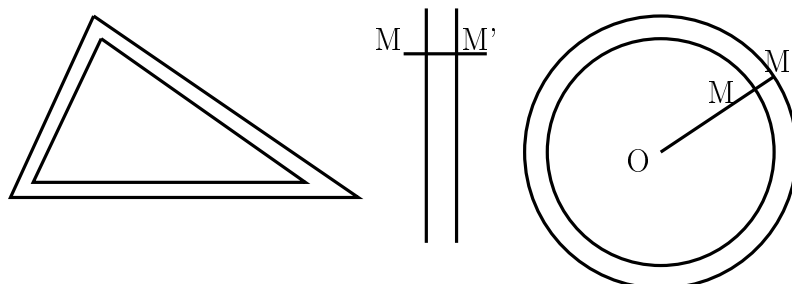
*Exemple 2 :*

a) -Un triangle  $ABC$  étant donné. Construire une figure de même périmètre et d'aire plus petite.

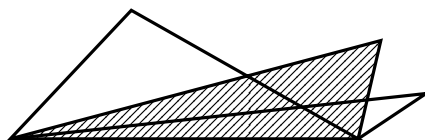


Solutions d'élèves de 10-11 ans : la partie hachurée répond à la question.

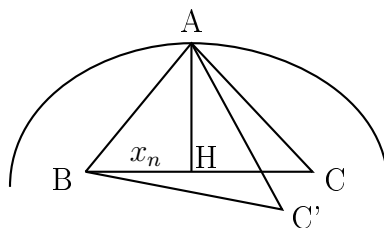
Certains s'imposent de tracer un autre triangle, contrainte qui n'est pas dans l'énoncé. J'en ai vu alors qui ont fait un autre triangle très près du premier à l'intérieur en disant : C'est le même périmètre car les lignes sont très près, mais l'aire est plus petite car c'est à l'intérieur.



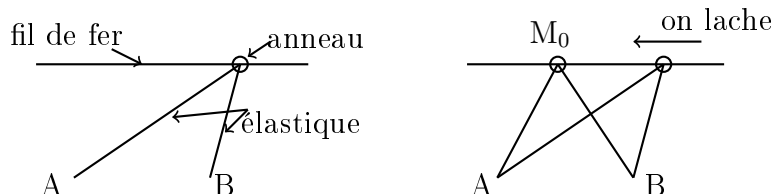
Effectivement si je trace deux segments parallèles j'ai une correspondance point à point entre eux et ils ont la même longueur. Pourquoi n'en serait-il pas de même pour deux cercles concentriques ou deux triangles ? Deux lignes de longueur différentes peuvent être mises en bijection, c'est un paradoxe sur lequel il faut réfléchir un jour. Les élèves plus grands qui s'imposent de tracer un triangle gardent en général un côté fixe. On leur demande alors de donner plusieurs solutions et ils sont surpris de retrouver une ellipse.



A périmètre donné  $p$ , l'aire la plus grande est celle du triangle isocèle quand on garde un côté fixe. A partir du triangle isocèle de base  $[BC]$ , on augmente à nouveau l'aire en gardant  $[AB]$  fixe. On obtient un deuxième triangle isocèle de base  $[AB]$ . On continue et cela donne une suite de triangles qui converge vers le triangle équilatéral. Cela se montre en appelant  $x_n$  la longueur de la demi base à l'étape  $n$ ,  $x_{n+1} = \frac{p - x_n}{2}$ .



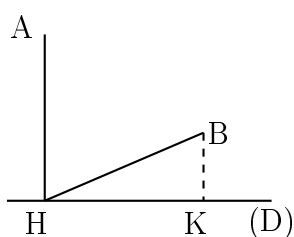
b- Problème dual : Sur une planche sont matérialisés des triangles de base fixe  $[AB]$  et d'aire constante car le sommet  $M$  se déplace sur une droite  $(D)$  parallèle à  $[AB]$ . Le périmètre minimum est obtenu avec le triangle isocèle.



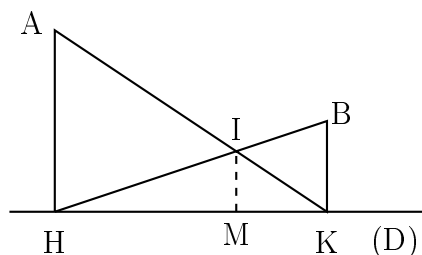
c- Au lieu d'avoir  $(AB) \parallel (D)$  prenons les points  $A$  et  $B$  quelconques. Le problème est alors de trouver un point  $M$  de  $(D)$  tel que  $MA + MB$  soit minimum.

Conjectures des élèves :

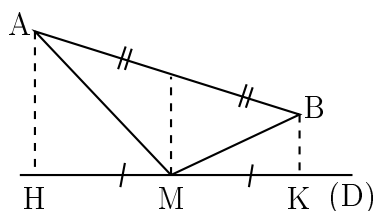
- 1- Le trajet le plus court est  $AH + HB$  car je vais "tout droit" pour commencer.
- 2- Il n'y a pas de raison que le trajet le plus court soit  $AHB$  plutôt que  $BKA$ . Je prends une solution moyenne  $AM + MB$  en projetant le point  $I$  en  $M$ .
- 3- Le trajet le plus court se trouve en projetant le milieu de  $[AB]$  ou directement avec  $M$  milieu de  $[HK]$ .
- 4- Le trajet le plus court se trouve avec un point  $M$  de la droite équidistant de  $A$  et  $B$  (sur la médiatrice de  $[AB]$  ).



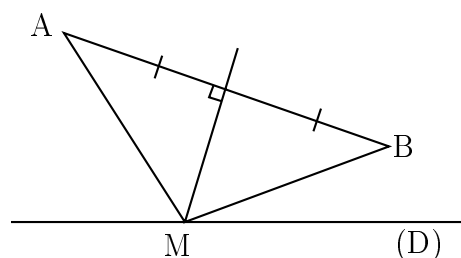
- 1 -



- 2 -

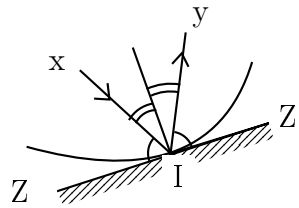
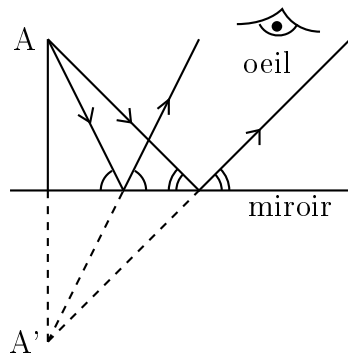


- 3 -



- 4 -

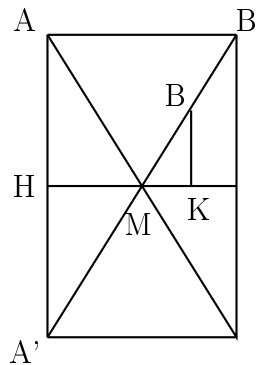
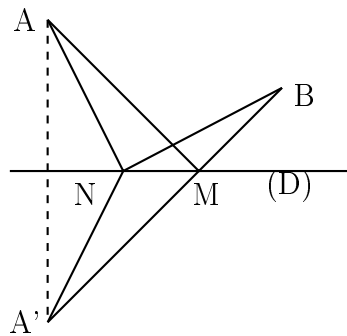
Parmi ces conjectures une seule est exacte mais c'est difficile de le vérifier en mesurant sur le dessin car il y a toute une zone où on peut avoir différents points  $M$  et trouver la même mesure  $MA + MB$ . Il y a plusieurs façons de penser à introduire le point  $A'$  symétrique de  $A$  par rapport à  $(D)$ . Par exemple la réflexion sur un miroir d'un rayon de lumière qui suivra le trajet le plus court.



La loi est la même sur le miroir courbe à condition de remplacer localement la courbe par un miroir plan selon le plan tangent.

Solution géométrique :  $AN + NB = A'N + NB, A'N + NB > AB$ .

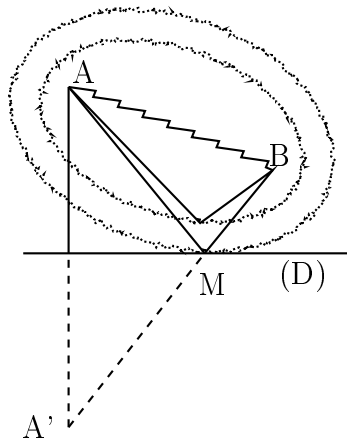
Pour penser à  $A'$  symétrique de  $A$ , on peut aussi dire : je remplace le problème par un problème plus facile. J'aurais la solution qui est la ligne droite si les points  $A$  et  $B$  étaient de part et d'autre de la droite, donc je remplace  $A$  par son symétrique  $A'$  ou bien  $B$  par son symétrique.



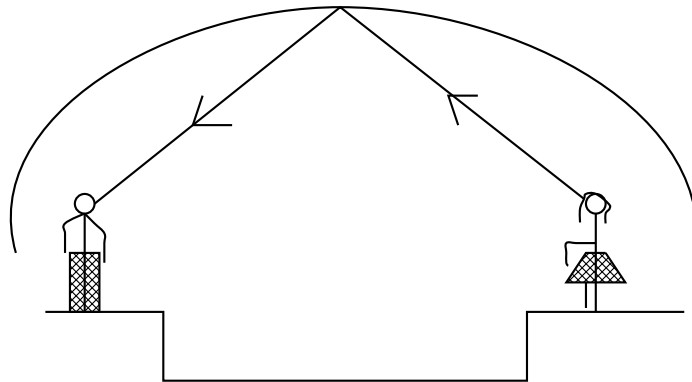
Une solution par le calcul est possible ( $x = HM$ ) . Les calculs sont plus faciles si  $(AB) \parallel (D)$  . On peut s'y ramener en remontant le point  $B$ . C'était l'idée d'un étudiant, ce qui lui a permis d'introduire les symétriques.

La conjecture exacte parmi les quatre avancées était la 2. Le point  $M$  solution divise le segment  $[HK]$  dans le rapport  $AH/BK$ . On retrouve le cas particulier du milieu quand  $AH = BK$ .

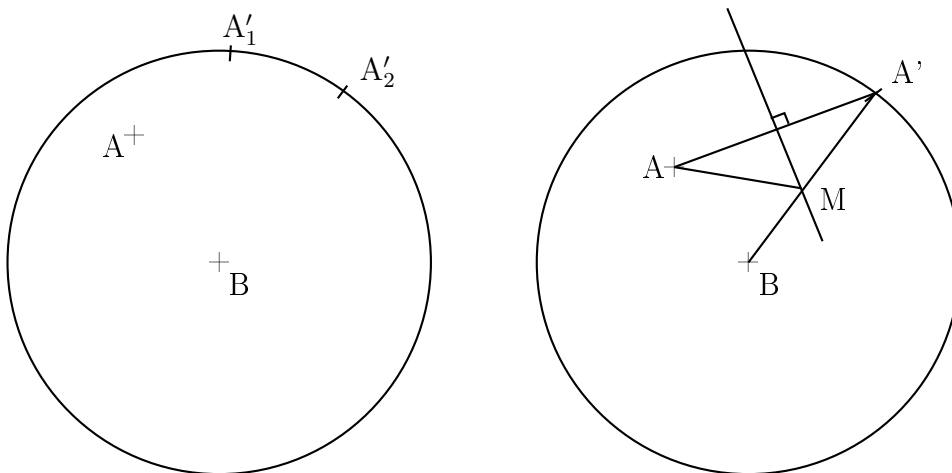
Le résultat trouvé précédemment est à mettre en relation avec une propriété de l'ellipse : le symétrique  $A'$  du foyer  $A$  par rapport à la tangente en  $M$ , le point  $M$  et le foyer  $B$  sont alignés.



Ce dessin est censé représenter les deux quais du métro parisien. Construire des voûtes elliptiques permet de communiquer à distance.....



Ce théorème justifie de l'ellipse par pliage comme enveloppe de ses tangentes.



Par pliage on fait venir  $A$  sur  $A'$  et à chaque fois on repasse sur le ph avec un crayon.

Rayon du cercle :  $BA' = MA + MB$ .

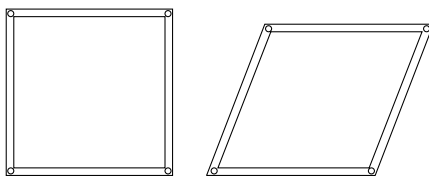
On obtient de même la parabole en remplaçant le cercle par une droite, résultat qui peut se démontrer dès la seconde. Les élèves disent : Mais comment démontrer que toutes ces droites sont tangentes à une parabole ? Ils voient alors l'intérêt d'utiliser un paramètre pour écrire les équations, une seule expression nous les donne toutes !

On obtient l'hyperbole en plaçant le point  $A$  à l'extérieur du cercle. En fait on pourrait imaginer le point  $A$  et le point  $A'$  fixes ainsi que le diamètre du cercle passant par  $A'$ . Le point  $B$  s'éloigne de  $A'$  sur ce diamètre et la courbure du cercle diminue car son rayon augmente. Quand  $B$  est à l'infini on a une droite, puis le cercle se courbe dans l'autre sens et le point  $A$  devient extérieur au cercle.

Cette idée rejoint celle d'un de mes élève à propos du cercle circonscrit au triangle. Je matérialisais le triangle par deux baguettes articulées en  $A$  et je disais : Quand l'angle  $A$  est aigu, le centre est dans le triangle, quand l'angle  $A$  augmente le centre du cercle descend, quand l'angle est droit, le centre du cercle est au milieu du côté variable, puis quand l'angle devient obtus, le centre sort du triangle. A la limite pour l'angle plat, le centre est à l'infini. Un élève m'a dit alors : Pourquoi vous ne continuez pas dans l'autre sens ? Effectivement si l'angle devient rentrant, le centre du cercle saute d'un infini à l'autre pour rentrer à nouveau progressivement dans le triangle.....

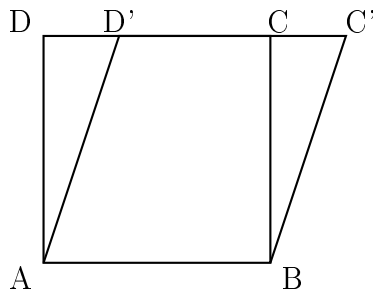
*Exemple 3 : Le carré articulé*

Voici un carré articulé dans deux positions voisines.



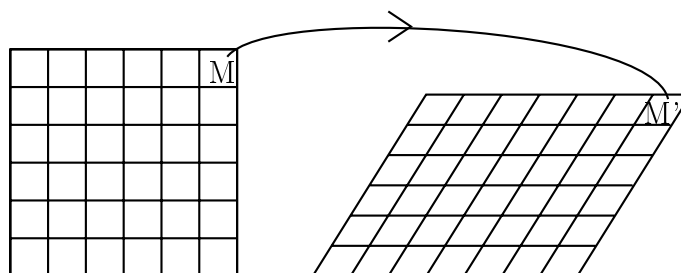
Les deux losanges ont-ils la même aire ? Comme pour les rectangles de ficelle certains élèves disent : C'est la même aire car c'est le même périmètre.

L'argument de compensation est un peu différent. Certains font la figure ci-dessous en expliquant que l'aire perdue à gauche se retrouve à droite, sans s'apercevoir qu'elle ne rend pas compte de la situation car dans le mouvement les côtés ne changent pas de longueur. Or ici  $AD < AD'$ .





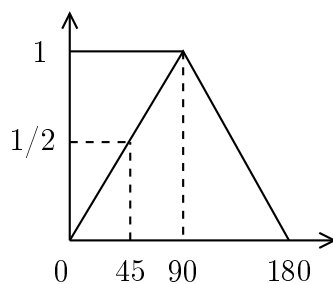
D'autres élèves disent que c'est la même aire car le côté reste le même croyant que l'aire du parallélogramme se calcule par le produit des côtés. La justification qu'ils donnent est la suivante : La formule de l'aire du rectangle par le produit des dimensions se justifie par un quadrillage. Dans un parallélogramme on a toujours le même quadrillage mais penché ! Néanmoins le nombre de cases du quadrillage est le même, si petites que soient les cases.



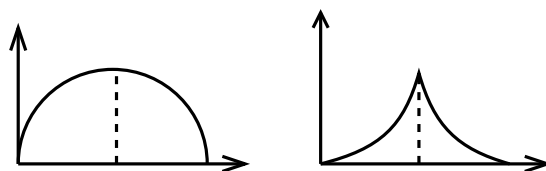
Effectivement il y a une bijection point à point entre deux parties du plan d'aires différentes. Il s'agit de l'obstacle de l'infini en dimension deux, le même qui a surgi pour la bijection entre deux segments de longueurs différentes ou deux cercles concentriques.

On a une fonction qui est l'aire du losange. Quelle est la variable ? Les élèves suggèrent souvent la hauteur du parallélogramme, et il faut comprendre que la variation de l'aire est la même que la variation de la hauteur. Puis ils suggèrent l'angle ou bien la diagonale. Quand on choisit l'angle, les élèves prévoient le graphique de la variation de l'aire.

Souvent ainsi



Parfois ainsi



Un dessin sur quadrillage permet de se convaincre que la linéarité n'est pas la bonne hypothèse. En comptant les carreaux on voit que pour 45 degrés, l'aire n'est pas moitié de celle du carré. C'est important à cause de l'erreur fréquente :

$\sin(2a) = 2\sin(a)$ . Le graphique terminé point par point, les élèves pensent en ‘général qu’il s’agit d’une parabole. On comprend que ce n’en est pas une en prenant un point particulier.

Ce problème du carré articulé permet d’introduire la fonction sinus et nous conduit à deux autres thèmes :

- celui des transformations affines,
- celui des isopérimètres.

La transformation affine bijective entre les deux parties du plan est la suivante :

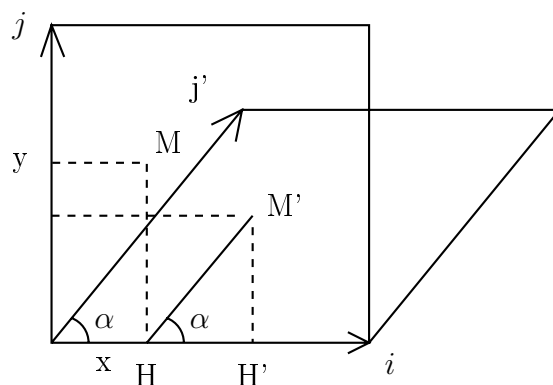
$$\begin{aligned} AM' &= f(AM) = f(xi + yj) = x'i + y'j, \\ f(i) &= i, f(j) = j', \\ f(xi + yj) &= xf(i) + yf(j) = xi + yj', \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} j' &= (\cos \alpha)i + (\sin \alpha)j \\ x' &= x + y(\cos \alpha), \\ y' &= \sin \alpha. \end{aligned}$$

soit

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 1 \\ \sin \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



En général

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

ayant pour matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Par diagonalisation, on cherche. les vecteurs transformés en vecteurs colinéaires :  
 $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$ .

1- S'il y a deux valeurs propres réelles  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , on a deux vecteurs propres  $u' = \lambda_1 u$  et  $v' = \lambda_2 v$ , dans la base des vecteurs propres, la matrice est :

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Bmatrix}.$$

2- S'il y a deux valeurs propres complexes :

$$\begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

est le produit d'une matrice de rotation par une matrice ayant deux valeurs propres réelles.

3- S'il y a une valeur propre double : la transformation est une homothétie ou une transvection qui est la composée de deux affinités.

On prend maintenant une toile élastique attachée à deux batons parallèles. Le dessin sur une toile élastique donne toutes les transformations affines aux isométries près. Les aires sont multipliées par le produit des valeurs propres (réels positifs).

Pour le carré articulé, la valeur propre  $i$  est associée au vecteur propre  $\iota$  et a 1 valeur propre sino associée au vecteur propre  $JJ'$ . L'ombre du carre donnée par le soleil sur le sol se mathématise par une transformation affine et l'ombre donnée par la lampe se mathématise par une transformation projective.

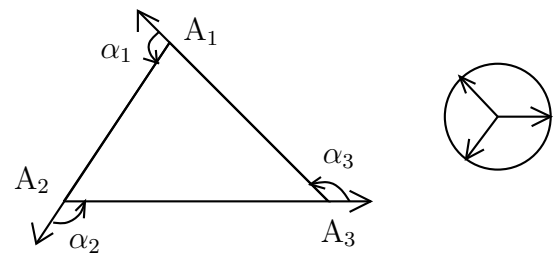
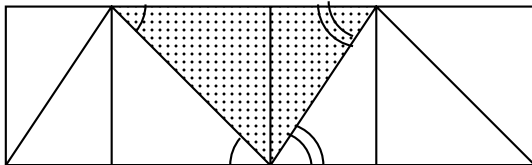
Si deux polygones ont le même périmètre, parmi les polygones de  $n$  côtés, c'est le régulier qui a l'aire maximale et entre deux polygones réguliers, celui qui a davantage de côtés a l'aire maximale. Le cercle est encore meilleur.

En dimension 3, pour une aire extérieure donnée c'est la sphère qui a le volume maximal. Ces résultats peuvent donner lieu à une progression très intéressante avec les élèves.

*Exemple 4 : Somme des angles du triangle*

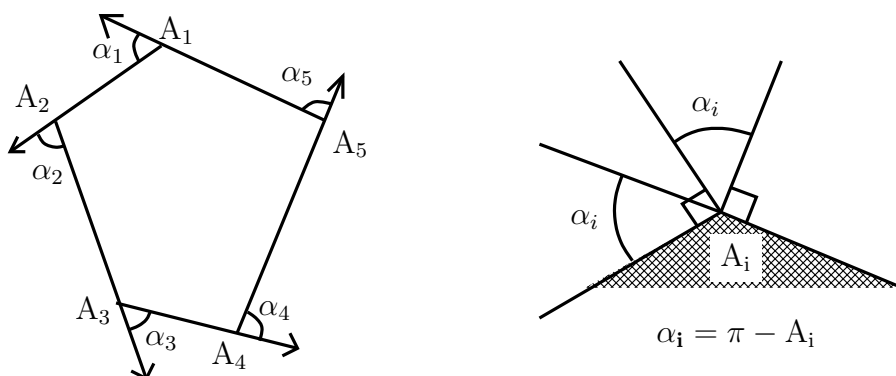
Au cours moyen et jusqu'en 6ème, les élèves mesurent les trois angles et font la somme des mesures. Ils trouvent un nombre voisin de 180 degrés et prévoient que si la mesure des côtés du triangle est doublée, cette somme va doubler.

Il y a plusieurs façons de comprendre.

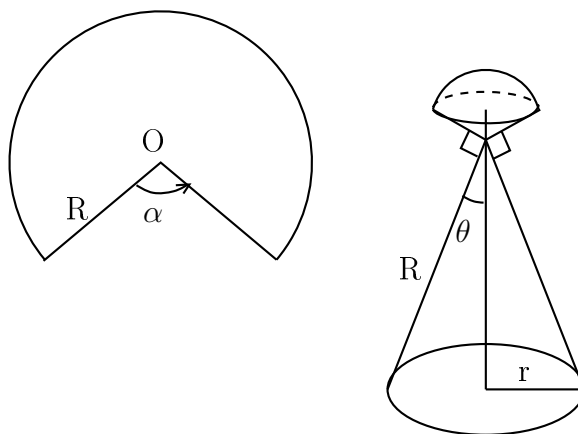


Une façon est le pavage du plan avec un triangle et ses transformés par isométrie. Une autre façon consiste à faire tourner un vecteur autour du triangle ou du polygone  $\sum \alpha_i = 2\pi$ . Si on accepte d'admettre qu'en chaque point singulier  $A_i$  la courbure est  $\alpha_i$ , on retrouve que pour toute courbe homéomorphe à un cercle, la courbure totale est  $2\pi$ .

Au lieu de faire circuler un vecteur qui suit le pourtour du polygone, on fait circuler un vecteur normal au polygone. On a toujours  $\sum \alpha_i = 2\pi$ .



L'intérêt du vecteur normal est de pouvoir passer en dimension 3. Je fais faire des cônes de révolution aux élèves. Ils obtiennent des cônes plus ou moins pointus. Qu'est-ce qui dans le patron, détermine l'angle au sommet  $\theta$ ? On a  $(2\pi - \alpha)R = 2\pi r$  soit  $2\pi - \alpha = 2\pi \sin(\theta)$ . Plus  $\alpha$  est grand, plus  $\theta$  est petit.

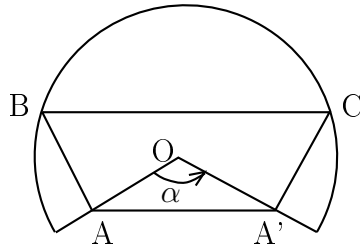


Un vecteur normal au cône circule au sommet du cône. L'angle solide décrit par ce vecteur normal est :  $2\pi(1 - \sin(\theta))$  soit  $\alpha$ .

Un triangle  $ABC$  tracé sur un cône en mettant le sommet  $A$  au sommet. En ouvrant le patron,  $A$  donne naissance à  $A$  et  $A'$ , dans le quadrilatère  $A'ABC$  la somme des angles est

$$A + A' + B + C = 2\pi - OAA' - OA'A = 2\pi - (\pi - \alpha) = \pi + \alpha.$$

C'est la somme des angles du triangle tracé sur le cône. Ceci est à rapprocher de la somme des angles du triangle sphérique :  $A + B + C = \pi + \text{aire } ABC/R^2$ .



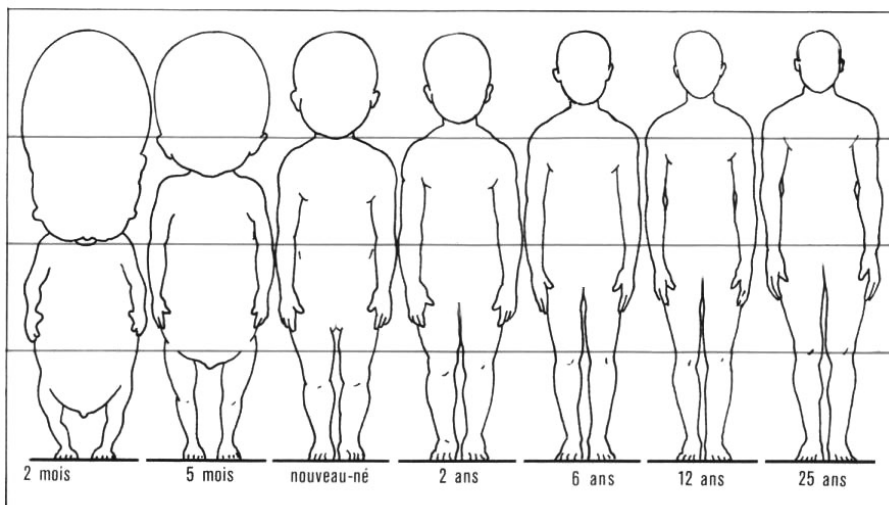
On peut dire que  $\alpha$ , qui est ce qui manque dans le patron pour avoir  $2\pi$ , est aussi la courbure en ce point singulier. Dans un cube, il manque  $(\pi/2)8$  fois, donc  $4\pi$ , donc la courbure totale est  $4\pi$  comme pour toute surface homéomorphe à une sphère.

*Exemples 5 :*

J'ai travaillé avec des étudiants, mais j'ai beaucoup appris aussi avec des élèves plus jeunes.

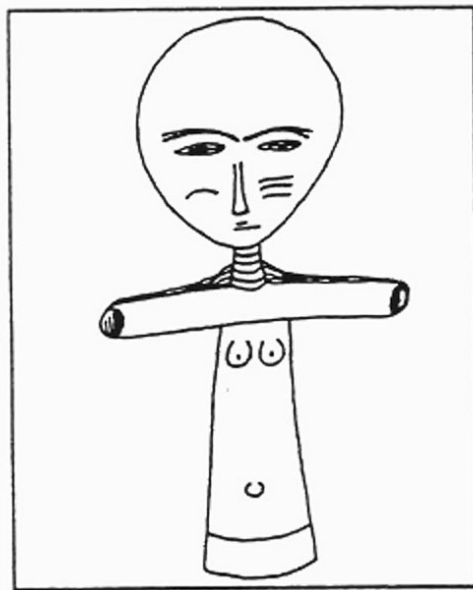
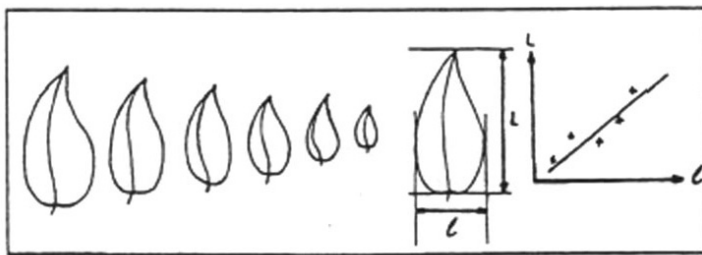
a- Je demande d'agrandir une photo rectangulaire de 4 cm sur 2 cm de sorte que 4 cm devienne 7 cm. Ils ajoutent 3 sur deux côtés ou une bande de largeur constante tout autour. C'est faux, mais y a-t-il des polygones qui donneraient une figure homothétique par ce procédé? Oui, tout polygone dont les bissectrices sont concourantes. C'est une petite découverte.

b- Comment grandit-on? En 5ème au Niger mes élèves ont mesuré leur taille totale et leur tête et ont fait le rapport des deux mesures. Ils avaient prévu qu'en moyenne ils avaient de plus petites têtes que les européens et les américains blancs et aussi que les filles devaient avoir de plus petites têtes que les garçons. Quelle surprise de constater que les statistiques ne donnent aucun avantage dans ce sens ni aux uns ni aux autres! Pour conclure nous avons fait le dessin suivant :



Chez le poulain qui vient de naître ce sont les pattes qui sont très grandes par rapport au corps. Pour un cheval les pattes sont importantes, pour un homme c'est le cerveau.

Les végétaux, eux, n'ont pas de priorité de ce genre. Ils grandissent de façon relativement proportionnelle. Bien sûr la proportionnalité n'est qu'un modèle qui approche la réalité. Les écarts avec le modèle permettent d'expliquer l'approximation de toute modélisation. Prenons plusieurs feuilles du même rameau sur le même arbre ou arbuste (magnolia, rosier...).



La poupée Ashanti symbole de fécondité dans l'ouest africain a le même rapport taille/tête que le fœtus et dans les tableaux de Lucas Cranach les adultes ont de petites têtes par rapport à leur corps pour marquer le fait justement qu'ils sont adultes.

*En conclusion* : Beaucoup de professeurs se posent cette question : Comment motiver les élèves en mathématiques et particulièrement les filles ? Voici plusieurs réponses. Il y a une motivation interne aux mathématiques : je suis motivée parce que je me pose des questions à propos de ce que je sais et alors j'ai conscience d'apprendre en intégrant ce savoir nouveau que j'ai compris et qui donc m'intéresse.

Il y a aussi une motivation externe. Les mathématiques peuvent : rassurer avec des règles, amuser comme un jeu, en mettant au défi, en compétition avec soi-même ou les autres, donner un pouvoir par leur efficacité pour la modélisation donc la prévision, émouvoir par l'appel à l'imagination et au rêve.

C'est ce dernier point qui est le plus important pour moi personnellement.



Pour son tombeau à Bâle, Jacques Bernoulli avait rêvé d'une spirale logarithmique. La réalisation n'en est pas très réussie mais l'inscription nous dit : *Transformée, je ressurgis, semblable à moi-même.*

L'essentiel de ce que je vous ai dit ici est contenu dans mes deux ouvrages [1], [2]. Ils s'adressent surtout aux enseignants du secondaire mais ce ne sont ni des manuels scolaires de mathématiques ni des traités théoriques de didactique. Que ce soit en mathématique ou en didactique, le chercheur décontextualise son travail pour le communiquer à ses pairs, mais à l'inverse celui qui veut transmettre ce savoir à ceux qui l'ignorent doit recréer un contexte significatif sans pouvoir reproduire tel quel le processus historique de la découverte. Ce n'est pas facile. Comment dynamiser l'enseignement par des problématiques signifiantes pour les élèves, acceptables en mathématique, raisonnables compte-tenu des contraintes scolaires ? Comment éviter les cours magistraux répondant à des questions que très peu d'élèves se posent dans cette forme, ou la juxtaposition d'activités disparates qui ne donnent que l'illusion du vivant ? En quoi les mathématiques concernent-elles les futurs citoyens, les femmes et les hommes ?

J'ai beaucoup appris en didactique des mathématiques des travaux de Guy Brousseau, Régine Douady et Yves Chevallard. Hors de France, mes maîtres ont été Emma

Castelnuovo, Hans Freudenthal et Sofia Krygowska. Enfin Marie-Françoise Roy m'a permis de garder un contact avec les mathématiques, ce qui me semble essentiel. Grâce à eux, j'ai pu construire mes cours avec mes élèves dans un climat de confiance entre nous. C'est pour cela que mes livres doivent beaucoup à ces jeunes, autant petits élèves que grands étudiants, à leurs idées, à leurs questions, parfois attendues mais parfois surprenantes, rarement banales, même et surtout chez ceux qu'on disait faibles, parce qu'ils pensent à côté, faculté capitale dans l'invention comme l'a souligné Jacques Hadamard. C'est grâce à eux, si notre école ou notre université ne les brise pas, que nous pourrions changer le monde..

### **Bibliographie**

[1] *Annie Berté* Mathématique dynamique pour Alice, Boubacar...et tous les autres. Nathan Pédagogie, septembre 1993

[2] *Annie Berté* Mathématique du collègue au lycée pour Chloé, Daniel...et tous les autres. Nathan Pédagogie, juillet 1996

IUFM d'Aquitaine  
Chateau Bourran  
160 avenue de Verdun, BP 152  
33705 Mérignac CEDEX



## Asymptotiques dans les plaques minces

Monique Dauge

d'après un travail avec Isabelle Gruaïs

### 1. Petit paramètre et perturbation singulière

La classe de problèmes auxquels nous nous intéressons fait partie des problèmes aux limites pour des *équations aux dérivées partielles* (EDP pour les intimes). Cela signifie que nous considérons une EDP posée dans un *domaine* du plan (bi-dimensionnel) ou de l'espace (tri-dimensionnel). Cette EDP est munie de *conditions aux bords* du domaine pour que l'ensemble du problème soit *bien posé*, c'est-à-dire qu'il en existe une et une seule solution. La statique ou l'évolution de beaucoup de grandeurs physiques sont modélisées par de tels problèmes.

Dans l'EDP et dans les conditions aux limites apparaissent naturellement des coefficients. Très souvent les ordres de grandeurs de ces coefficients sont différents les uns des autres. Ce sont les proportions *relatives* des uns par rapport aux autres qui font apparaître des *petits paramètres* correspondant notamment à des quantités physiques ou à un rapport entre des dimensions. Donnons quelques exemples.

a) Quantités physiques :

- le coefficient  $\frac{\hbar}{2m}$  dans l'équation de Schrödinger,
- la viscosité  $\nu$  dans le système de Navier-Stokes,
- la fréquence  $k$  ou son inverse  $k^{-1}$  en électromagnétisme (Maxwell).

b) Une dimension par rapport aux autres dans le domaine :

- Tiges, poutres.
- Plaques, coques.
- Presque-coins, c'est-à-dire pour un domaine plan, une figure proche d'un polygone où les coins sont remplacés par des arcs de cercles de petit rayon  $\varepsilon$ .
- Macro-structures périodiques à période petite : on est dans le champ d'action de l'homogénéisation.

Tous ces exemples relèvent des *perturbations singulières* ce qui signifie que le problème limite (s'il existe!) obtenu en égalant à 0 le petit paramètre n'est plus de la même nature que le problème initial, autrement dit qu'il a perdu des dimensions ou des propriétés d'ellipticité, d'hyperbolicité, etc

Faisons une petite digression pour expliquer brièvement la différence entre perturbation régulière et perturbation singulière sur l'exemple de l'équation de Schrödinger. Dans un domaine  $\Omega$  borné, on pose la célèbre équation aux valeurs propres

$$-\frac{\hbar}{2m}\Delta\psi + V\psi = E\psi$$

complétée par des conditions d'annulation sur le bord de  $\Omega$ , inodésant la quantification de l'énergie  $E$  d'une particule de masse  $m$  soumise à un potentiel  $V$ . La masse étant grande devant  $\hbar$ , le paramètre  $\varepsilon := \hbar(2m)^{-1}$  est petit devant l'opérateur de second ordre  $\Delta$ . Si on réduit à zéro le petit paramètre, l'équation dégénère en  $V\psi = E\psi$  où le Laplacien  $\Delta$  a disparu. Cette équation laisse assez peu imaginer que les valeurs propres de  $-\varepsilon\Delta + V$  vont converger (sous certaines hypothèses) vers le minimum de  $V$ ...

Par contre si l'on considérait les valeurs propres de  $-\Delta + \varepsilon V$ , la perturbation serait tout à fait régulière et quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , les valeurs propres convergent continuellement (et même analytiquement quand elles sont simples) vers les valeurs propres du problème limite, le problème de Dirichlet, à savoir le Laplacien avec conditions d'annulation sur le bord de  $\Omega$ . Si on prenait comme domaine tout l'espace  $\mathbb{R}^n$  avec comme potentiel celui de l'oscillateur harmonique  $V(x) = |x|^2$ , la perturbation redeviendrait (un peu) singulière, le spectre ponctuel se transformant en spectre continu...

Mais l'objet de notre exposé est différent : nous allons évoquer le cas de la perturbation singulière géométrique, plus précisément celui des poutres et plaques, où l'épaisseur  $2\varepsilon$  est petite devant les autres dimensions, le problème aux limites lui-même ne dépendant pas du tout du petit paramètre.

## 2. Le problème aux limites primitif

Le domaine est une poutre :

$$\Omega^\varepsilon = \omega \times ]-\varepsilon, +\varepsilon[$$

avec  $\omega = ]a, b[$  un intervalle. Disons plutôt que nous considérons la *famille* de domaines  $\Omega^\varepsilon$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ . L'inconnue est une fonction  $u^\varepsilon(X, Z)$  définie sur  $\Omega^\varepsilon$ . Nous notons la coordonnée horizontale  $X \in \omega$  et la coordonnée verticale  $Z \in ]-\varepsilon, +\varepsilon[$ . L'opérateur est le *Laplacien* que nous avons déjà évoqué :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 X} + \frac{\partial^2}{\partial^2 Z}$$

dont nous condensons l'écriture en

$$\Delta = \partial_{XX} + \partial_{ZZ}.$$

Le Laplacien est un opérateur d'ordre 2, elliptique, c'est-à-dire que les courbes de niveau de son symbole  $\sigma(\xi_X, \xi_Z) = \xi_X^2 + \xi_Z^2$  sont des ellipses. Pour le "compléter" sur le bord de  $\Omega^\varepsilon$  il faut (et il suffit !) qu'une condition soit bien choisie sur chaque côté. Les choix usuels de conditions aux limites sont celles de *Dirichlet* où on impose la valeur de la fonction inconnue, et celles de *Neumann* où on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction inconnue. Ici, nous choisissons

- sur les bords horizontaux les conditions de Neumann,
- sur les bords verticaux les conditions de Dirichlet.

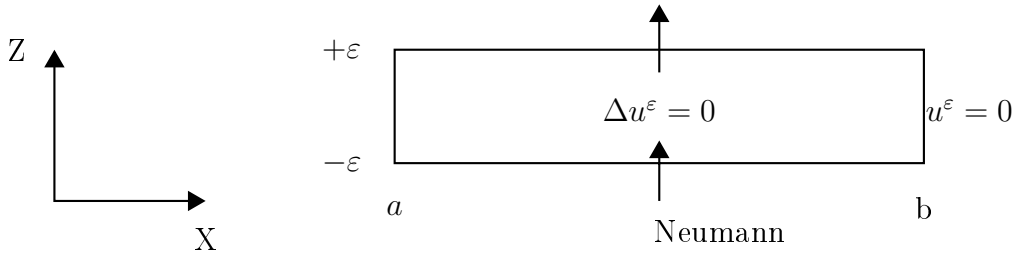


Figure 1

Les données sont deux fonctions régulières  $g_+(X)$  et  $g_-(X)$  définies sur les deux bords horizontaux, intervenant dans la condition de Neumann, les données sur les bords verticaux étant nulles. Cela donne le problème aux limites sur  $\Omega^\varepsilon$

$$\begin{cases} (\partial_{XX} + \partial_{ZZ})u^\varepsilon(X, Z) = 0, & \forall (X, Z) \in \Omega^\varepsilon \\ \partial_Z u^\varepsilon(X, Z) = \varepsilon g_-, & \forall X \in \omega, Z = -\varepsilon \\ \partial_Z u^\varepsilon(X, Z) = \varepsilon g_+, & \forall X \in \omega, Z = \varepsilon \\ u^\varepsilon(X, Z) = 0, & \forall X \in \partial\omega, \forall Z \in ]-\varepsilon, \varepsilon[. \end{cases} \quad (1)$$

L'écriture  $\partial\omega$  a été préférée à  $\{a, b\}$  pour le bord de  $\omega$ , pour avoir une écriture indépendante de la dimension. Ce problème pourrait modéliser l'équilibre de la température dans une poutre.

Notre problème consiste en la comparaison des solutions  $u^\varepsilon$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour les rendre comparables, nous pouvons par exemple les définir toutes sur le même domaine, grâce à un changement de variable simple.

### 3. Le changement d'échelle

Les nouvelles variables sont  $x = X$  et  $z = Z/\varepsilon$ , le nouveau domaine est  $\Omega = \omega \times ]-1, +1[$ .

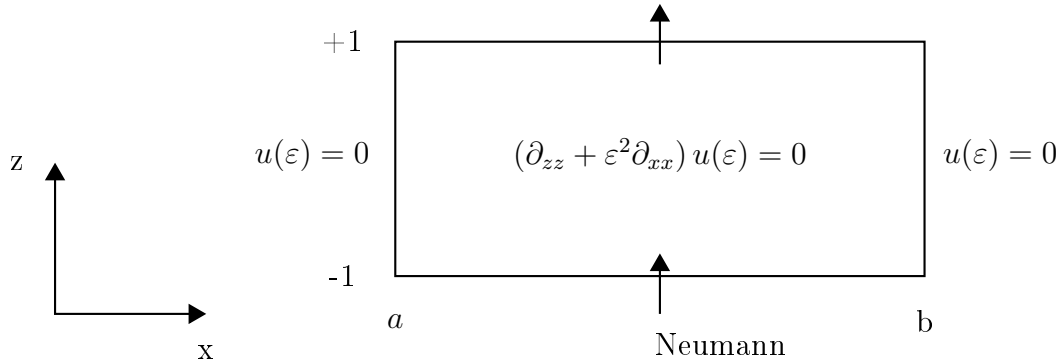


Figure 2

Le nouveau problème sur  $\Omega$  est

$$\begin{cases} (\partial_{xx} + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{zz}) u(\varepsilon)(x, z) = 0 & \forall (x, z) \in \Omega \\ \partial_z u(\varepsilon)(x, z) = \varepsilon^2 g_- & \forall x \in \omega, z = -1 \\ \partial_z u(\varepsilon)(x, z) = \varepsilon^2 g_+ & \forall x \in \omega, z = 1 \\ u(\varepsilon)(x, z) = 0 & \forall x \in \partial\omega, \forall z \in ]-1, 1[. \end{cases} \quad (2)$$

La nouvelle question est : quel est le comportement de  $u(\varepsilon)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  ?

#### 4. Ansatz série entière

Nous exposons la méthode de façon heuristique. Pour déterminer le comportement de  $u(\varepsilon)$ , on fait des propositions de développement, communément dénommées à l'aide du substantif allemand Ansatz. On commence par le plus naturel, i.e. celui qui marche dans le cas des perturbations régulières, à savoir un développement polynomial en  $\varepsilon$  à coefficients fonctions de  $(x, z)$ . Ainsi on cherche  $u(\varepsilon)$  sous la forme

$$u(\varepsilon) \sim u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots + \varepsilon^k u^k + \dots \quad (3)$$

On injecte cet Ansatz dans le problème (2) et on identifie terme à terme selon les puissances de  $\varepsilon$  dans le but de trouver les coefficients  $u^k$ . Le terme en  $\varepsilon^k$  fournit une équation liant  $u^k$  et  $u^{k-2}$ . Précisément, on obtient successivement deux équations homogènes pour  $k = 0, 1$  :

$$\begin{cases} \partial_{zz} u^k = 0, & (x, z) \in \Omega, \\ \partial_z u^k = 0, & z = -1, \\ \partial_z u^k = 0, & z = 1, \\ u^k = 0, & x \in \partial\omega \end{cases} \quad (4)$$

puis une équation faisant intervenir les données  $g_-$  et  $g_+$  pour  $k = 2$  :

$$\begin{cases} \partial_{zz}u^2 + \partial_{xx}u^0 = 0, & (x, z) \in \Omega \\ \partial_z u^2 = g_-, & z = -1 \\ \partial_z u^2 = g_+, & z = 1 \\ u^2 = 0, & x \in \partial\omega \end{cases} \quad (5)$$

et enfin les équations de récurrence pour  $k = 3$  :

$$\begin{cases} \partial_{zz}u^k + \partial_{xx}u^{k-2} = 0, & (x, z) \in \Omega \\ \partial_z u^k = 0, & z = -1 \\ \partial_z u^k = 0, & z = 1 \\ u^k = 0, & x \in \partial\omega. \end{cases} \quad (6)$$

Une fois les équations obtenues on essaie de les résoudre les unes à la suite des autres, sans perdre de degrés de liberté.

En intégrant les équations (4), on montre que  $u^0$  et  $u^1$  sont des constantes en  $z$ , autrement dit ne dépendent que de  $x$ , ce qu'on écrit sous la forme :

$$u^0(x, z) = u_C^0(x) \text{ et } u^1(x, z) = u_C^1(x). \quad (7)$$

Elles doivent en outre s'annuler pour  $x \in \partial\omega$ , mais cela ne les détermine pas encore complètement.

Intégrant une fois en  $z$  la première équation de (5) et tenant compte de la deuxième équation, on obtient

$$\partial_z u^2(x, z) = g_-(x) - \int_{-1}^z u_C^0(x) d\zeta. \quad (8)$$

La troisième équation de (5) impose alors la relation de compatibilité

$$g_+(x) = g_-(x) - 2u_C^0(x), \quad (9)$$

ce qui détermine complètement  $u^0$  par :

$$\left[ \begin{array}{l} u^0(x, z) = u_C^0(x) \text{ est la solution de} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \partial_{xx}u_C^0 = \frac{1}{2}(g_- - g_+)(x) & x \in \omega, \\ u_C^0(x) = 0 & x \in \partial\omega. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (10)$$

On obtient de même :

$$u^1 \equiv 0, \quad (11)$$

puis que  $u_C^2$  est solution de

$$\left[ \begin{array}{l} u^2(x, z) = u_C^2(x) + v^2(x, z) \text{ avec} \\ \left\{ \begin{array}{l} v^2 = zg_- - \left( \frac{z^2}{4} + \frac{z}{2} - \frac{1}{12} \right) (g_- - g_+) \\ \int_{-1}^{+1} v^2(x, z) dz = 0 \quad \forall x \in \omega \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (12)$$

et

$$u^3 = u_C^3. \quad (13)$$

Mais, comme on peut le voir sur la formule (12) en prenant par exemple pour  $g_-$  et  $g_+$  des constantes, en général il est *impossible de satisfaire*  $u^2 = 0$  sur le bord latéral.

Cela prouve que l'Ansatz série entière, quoiqu'ayant été satisfaisant pour les premiers termes n'est pas suffisant pour déterminer le comportement asymptotique de  $u(\varepsilon)$ .

### 5. Ansatz de couche limite

Pour lever l'obstruction, on va compléter l'Ansatz (3) par une autre série en puissance de  $\varepsilon$ , avec des coefficients  $w^k$  qui sont encore des fonctions de deux arguments; l'un d'eux sera toujours  $z$ - une variable que nous avons déjà mise à l'échelle- mais  $x$  va être remplacé par une *variante rapide*  $f$ , liée aux coordonnées locales près des bords  $a$  et  $b$  de  $\omega = ]a, b[$  : on remplace  $x - a$  et  $b - x$  par

$$t = \frac{x - a}{\varepsilon} \text{ ou } t = \frac{b - x}{\varepsilon}.$$

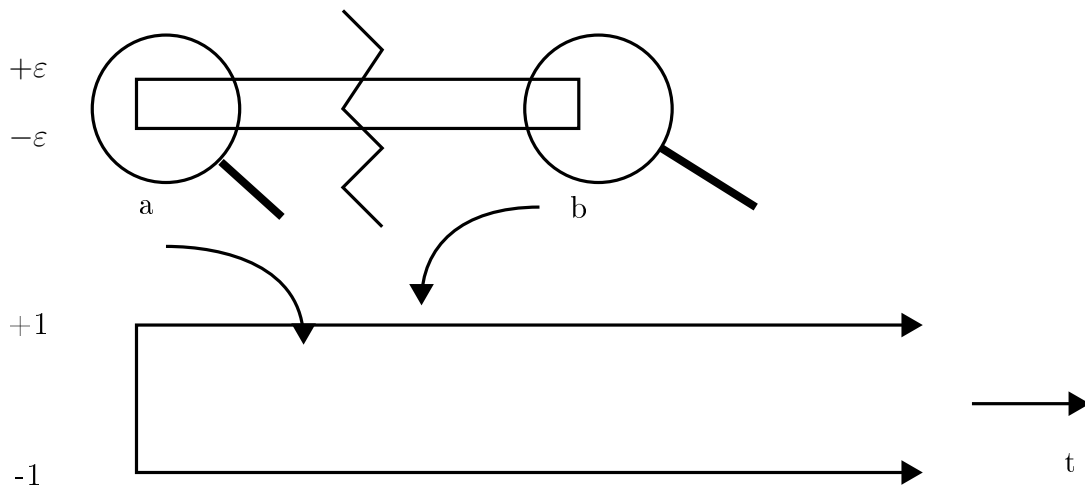


Figure 3

Cela revient à faire une dilatation, isotrope cette fois-ci, des deux extrémités de la poutre  $\Omega^\varepsilon$ , en espérant que les effets aux deux bouts vont être indépendants, autrement dit que les nouveaux profils  $w^k$  sont suffisamment décroissants quand  $t \rightarrow +\infty$ . Comme son nom l'indique, l'Ansatz couche limite est destiné à décrire des effets localisés dans une couche- qui est moralement d'épaisseur  $\varepsilon$ - et sera impuissant à décrire des effets globaux. On retrouve la problématique des matching asymptotics. On a typiquement un phénomène à deux échelles, comme en homogénéisation de macro-structures périodiques de période  $\varepsilon$ .

On cherche maintenant  $u(\varepsilon)$  sous la forme

$$u(\varepsilon) \sim u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots + \varepsilon^k u^k + \dots$$

$$\varepsilon^2 w_a^2 \left( \frac{x-a}{\varepsilon}, z \right) + \varepsilon^2 w_b^2 \left( \frac{b-x}{\varepsilon}, z \right) + \dots \quad (14)$$

Repartant d'où nous étions arrivés en (12), nous obtenons le problème résiduel suivant en l'extrémité inférieure  $a$  de  $\omega$

$$\begin{cases} (\partial_{tt} + \partial_{zz}) w_a^2(t, z) = 0, & 0 < t, & z \in ]-1, 1[ \\ \partial_z w_a^2(t, z) = 0, & 0 < t, & z = \pm 1 \\ w_a^2(0, z) = u^2(a, z), & & z \in ]-1, 1[ \end{cases} \quad (15)$$

et le problème analogue en  $b$ .

Pour résoudre (15), ou avec des notations plus simples

$$\begin{cases} (\partial_{tt} + \partial_{zz}) w(t, z) = 0, & 0 < t, & z \in ]-1, 1[ \\ \partial_z w(t, z) = 0, & 0 < t, & z = \pm 1 \\ w(0, z) = h(z), & & z \in ]-1, 1[ \end{cases} \quad (16)$$

on tire avantage du fait que le Laplacien et le domaine sont à variables séparables et on développe toutes les fonctions en  $z$  par rapport à la base des fonctions propres de l'opérateur de Neumann sur l'intervalle  $] -1, 1[$  défini par :

$$w \mapsto w'' \quad \text{pour } w \text{ tel que } w'(-1) = w'(1) = 0$$

à savoir  $\cos P\pi z$  pour  $P \in \mathbb{N}$  et  $\sin(\ell - \frac{1}{2})\pi z$  pour  $\ell \in \mathbb{N}^*$ . Développant la donnée au bord

$$h(z) = \sum_{\ell \geq 0} h_\ell^+ \cos \ell\pi z + \sum_{\ell \geq 1} h_\ell^- \sin \left( \ell - \frac{1}{2} \right) \pi z$$

on obtient une solution de (16) par

$$w(t, z) = \sum_{\ell \geq 0} h_\ell^+ \cos \ell\pi z e^{-\ell\pi t} + \sum_{\ell \geq 1} h_\ell^- \sin \left( \ell - \frac{1}{2} \right) \pi z e^{-(\ell - \frac{1}{2})\pi t}$$

Nous voyons que  $w$  est *exponentiellement décroissante* quand  $t \rightarrow +\infty$  si et seulement si  $h_0^+ = 0$ , i.e.

$$\int_{-1}^{+1} h(z) dz = 0$$

Nous voyons ainsi qu'une seule condition à chaque extrémité assure l'existence de deux profils à décroissance exponentielle. Appliquant ce que nous venons de faire au problème (15) et à son analogue en  $b$ , nous obtenons les deux profils  $w_a^2$  et  $w_b^2$  pourvu que les traces  $u^2(a, z)$  et  $u^2(b, z)$  soient de moyenne nulle sur  $(-1, 1)$ . Vu que par (12),  $u^2 = u_C^2 + v^2$ , cela signifie que  $u_C^2(a) = 0$  et  $u_C^2(b) = 0$ . Or l'équation (6) pour  $u^4$  montre que le second membre est d'intégrale nulle, donc en utilisant encore une fois (12), que  $\partial_{xx} u_C^2 = 0$ . Finalement,  $u_C^2$  est l'unique solution du problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} \partial_{xx} u_C^2 = 0 & x \in \omega \\ u_C^2(x) = 0 & x \in \partial\omega \end{cases} \quad (17)$$

Ainsi  $u_C^2 \equiv 0$ .

## 6. Développement asymptotique dans la poutre

Ainsi, continuant de même, nous pouvons montrer que :

$$u(\varepsilon) \sim u_C^0(x) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^{2k} v^{2k}(x, z) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^{2k} \left[ w_a^{2k} \left( \frac{x-a}{\varepsilon}, z \right) + w_b^{2k} \left( \frac{b-x}{\varepsilon}, z \right) \right]$$

au sens des développements asymptotiques, autrement dit l'erreur commise en remplaçant  $u(\varepsilon)$  par une partie finie de la série est de l'ordre de grandeur du premier terme négligé. En norme uniforme cela donne par exemple :

$$\begin{aligned} \|u(\varepsilon) - u_C^0\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C\varepsilon^2 \\ \|u(\varepsilon) - u_C^0 - \varepsilon^2 (v^2 + w_a^2 + w_b^2)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C\varepsilon^4 \end{aligned}$$

Par contre si l'estimation de  $u(\varepsilon) - u_C^0$  reste du même ordre en norme  $L^2$ , elle est altérée en norme  $H^1$  :

$$\|u(\varepsilon) - u_C^0\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{3/2}$$

à cause de la forte variation de la dérivée dans la couche limite.

Dans les problèmes de *plaques*,  $\Omega^\varepsilon$  est défini par  $\omega \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  avec  $\omega$  un domaine plan. Pour le Laplacien ou pour l'élasticité linéaire on obtient un développement asymptotique de la forme :

$$u(\varepsilon) \sim u^0(x, y) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k u^k(x, y, z) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k w_a^k \left( \frac{r}{\varepsilon}, s, z \right) \quad (18)$$



où  $r$  désigne la distance à  $\partial\omega$  et  $s$  est une abscisse curviligne dans  $\partial\omega$ . Dans le tableau comparatif suivant, nous comparons les termes apparaissant dans

- un domaine mince bi-dimensionnel pour le Laplacien,
- un domaine mince tri-dimensionnel pour le Laplacien,
- un domaine mince tri-dimensionnel pour l'élasticité.

Tableau comparatif  
 $u_C$  ne dépend pas de  $z$  :

$$uc = \zeta(x_*)$$

$u_{\text{KL}}$  déplacement de  
 Kirchhoff-Love

$$(\zeta_*(x_*) - z\nabla_*\zeta_3(x_*), \zeta_3(x_*))$$

	$\Delta, 2d$	$\Delta, 2d$	Elasticité
$u^0$	$u_C^0$	$u_C^0$	$u_{\text{KL}}^0$
$w^1$	0	0	$u_{\text{KL}}^1$
$w^1$	0	0	$w^1 = (w_*^1, 0)$
$u^2$	$v^2$	$v^2$	$u_{\text{KL}}^2 + v^2$
$w^2$	$w^2$	$w^2$	$w^2$
$u^3$	0	$u_C^3$	$u_{\text{KL}}^3 + v^3$
$w^3$	0	$w^3$	$w^3$
$u^4$	$v^4$	$u_C^4 + v^4$	$u_{\text{KL}}^4 + v^4$
$w^4$	$w^4$	$w^4$	$w^4$

En dimension 3, des termes supplémentaires apparaissent pour le Laplacien en raison de la courbure du bord. Les déplacements de Kirchhoff-Love jouent pour l'élasticité un rôle similaire aux fonctions constantes en  $z$  pour  $\Delta$ ; mais les interactions, en particulier l'algorithme de construction qui agit sur cinq niveaux simultanément, sont beaucoup plus compliquées et la condition de moyenne nulle valable pour le Laplacien doit être remplacée par quatre conditions liées au principe de Saint-Venant.

L'exemple pourtant simple que nous venons de traiter est assez caractéristique d'un problème aux limites sur des plaques minces [11], ou plus généralement d'un problème de perturbation singulière, voir aussi [3], et peut aussi illustrer la méthode de "matching asymptotics" [8].

Le point de départ de notre travail avec Isabelle Gruais était l'étude des déplacements solutions des équations de l'élasticité linéarisée sur une plaque mince encadrée sur son bord latéral. Après les travaux [1, 2] concernant l'erreur entre le premier terme  $u^0$  et la solution tri-dimensionnelle, nous avons démontré la validité du développement asymptotique complet *série entière- couche limite* (18) [4, 5, 6, 7]. Voir aussi [10, 9].

L'avantage d'un développement asymptotique complet est qu'il fournit sans trop de difficultés des estimations optimales à tous ordres, ce qui permet une validation précise des modèles de dimension inférieure (Reissner-Mindlin par exemple pour les plaques) et constitue un guide pour la construction de méthodes numériques performantes. Le

cas des coques et des équations non linéaires constituerait des extensions certainement plus difficiles mais tout à fait dignes d'intérêt.

## Références

- [1] *P. G. Ciarlet*. Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures : An Asymptotic Analysis. R.M.A. Vol. 14. Masson and Springer-Verlag, 1990.
- [2] *P. Ciarlet : P. Destuynder*. A justification of the two-dimensional plate model. *J. Mécanique* 18 (1979) 315-344.
- [3] *M. Costabel J M. Dauge*. A singularly perturbed mixed boundary value problem. Prepublication IRMAR 95-29, Rennes 1995.
- [4] *M. Daugef I. Gruais* Complete asymptotics in thin elastic plates and optimal estimates for the Kirchhoff-Love model, Prépublication IRMAR 9S-06, Rennes, 1995.
- [5] *M. Dauge, I. Gruais*. Développement asymptotique d'ordre arbitraire pour une plaque élastique mince encastrée, C. R. A. S. Paris Série I. 821, 1995, 375-380.
- [6] *M, Dauge, I. Gruais*. Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate. I : Optimal error estimates. A paraitre dans Asymptotic Analysis.
- [7] *M. Dauge, I. Gruais*. Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate. II : Analysis of the boundary layer terms. A paraitre in Asymptotic Analysis.
- [8] *A.M. It'in*. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, volume 102 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, R. I. 1992.
- [9] *V.G. Maz'ya, S.A. Nazarov, B.A. Plamenevskii*. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten, volume 82 of Mathematische Monographien. Akademie-Verlag, Berhn, 1991.
- [10] *S.A. Nazarov, I.S. Zorin*. Edge effect in the bending of a thin three-dimensional plate. *P. M. M. USSR* 5S (4) (1989) 500-507.
- [11] *C. Schtvab*. Boundary layer resolution in hierarchical models of laminated composites. *Math. Model. Numer. Anal.* 28 (5) (1994) 517-537.

IRMAR (URA CNRS 305), University de Rennes 1  
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex  
dauge@univ-rennes1.

## Formes quadratiques et isomorphisme : la simplification de modules projectifs et de formes hermitiennes

*Laura Fainsilber*

Dans un ensemble muni d'une loi de composition interne notée  $+$ , on dit que l'on peut simplifier par un élément  $b$ , ou que  $b$  est régulier, si pour toute paire d'éléments  $a, c$  tels que  $a + b = c + b$ , on a  $a = c$ . Dans un groupe, tous les éléments sont réguliers.

Nous allons voir ici des situations où l'on a une notion naturelle de somme, mais où l'on ne peut pas toujours simplifier. Autrement dit, on trouvera dans l'ensemble des modules ainsi que dans l'ensemble des formes quadratiques ou hermitiennes des objets  $X, Y, Z$  tels que  $X \oplus Y \simeq Z \oplus Y$  mais  $X \not\simeq Z$ . On trouve également des problèmes de simplification dans la théorie des noeuds de dimension supérieure.

La question de la simplification (cancellation en anglais) est très importante pour voir quels éléments s'annulent lorsque l'on définit une structure de groupe sur l'ensemble.

### 1. Modules projectifs, $K_0$

*Definitions* : Soit  $A$  un anneau, pas nécessairement commutatif, et soit  $M$ , un module à gauche sur  $A$ . On dit que  $M$  est *de type fini* s'il existe une famille génératrice finie  $(m_i)_{1 \leq i \leq s}$  telle que tout élément du module s'écrive comme combinaison  $A$ -linéaire des  $m_i$ . On dit que  $M$  est *libre* s'il existe une famille génératrice pour laquelle cette écriture est unique. Dans ce cas, les  $m_i$  forment une base, et  $M \simeq A^s$ . Un module  $M$  est dit *projectif* s'il existe un  $A$ -module  $N$  tel que  $M \oplus N$  soit un module libre.

On s'intéressera ici aux modules projectifs de type fini. Tous les modules considérés dans la suite seront de ce type.

*Exemples*

- si  $A = k$  est un corps, les modules de type fini sont les espaces vectoriels  $V = k^n$  ; ils sont tous libres, et *a fortiori* projectifs.
- Si  $A = \mathbb{Z}$ , les modules  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ont de la torsion alors que  $\mathbb{Z}$  n'en a pas, et ne sont donc pas projectifs. Les seuls modules projectifs sont les libres  $\mathbb{Z}^s$ .
- Soit  $A = \text{Mn}(k)$  l'anneau des matrices carrées de dimension  $n$  sur un corps  $k$ . Alors le  $k$ -espace vectoriel  $V = k^n$  est un module projectif mais pas libre. On a un isomorphisme de  $A$ -modules  $V \oplus V^{n-1} \simeq A$ .

*Le groupe  $K_0$* . Le premier (ou plutôt le 0-ième) niveau de construction de la  $K$ -théorie est la construction d'un groupe additif à partir de l'ensemble des  $A$ -modules projectifs de type fini.

Soit  $M$  un  $A$ -module projectif de type fini. On note  $[M]$  sa classe d'isomorphisme, et l'on considère toutes les sommes formelles  $\sum_{i=1}^n a_i [M_i]$  de  $A$ -modules avec  $a_i \in \mathbb{Z}$ ,

en posant  $l[M] + (-l[M]) = [0] = 0$ . On définit une relation d'équivalence engendrée par les relations

$$[M \oplus M'] \equiv [M] + [M']$$

et l'on pose

$$K_0(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i [M_i] \right\} / \equiv .$$

On dit qu'un  $A$ -module projectif est *stablement libre* s'il existe des entiers naturels  $r, s$  tels que  $M \oplus A^s \simeq A^r$ , autrement dit, si l'on peut prendre un module libre comme complément de  $M$  dans la définition de projectif. En particulier, tout module libre est stablement libre. Dans les exemples ci-dessus, tous les modules stablement libres étaient en fait libres, mais ce n'est pas toujours le cas (voir la question  $Q'_1$  ci-dessous).

De manière similaire, on peut affaiblir la notion d'isomorphisme en disant que deux modules  $M$  et  $N$  sont *stablement isomorphes* s'il existe un entier naturel  $r$  tel que  $M \oplus A^r \simeq N \oplus A^r$ , autrement dit s'ils sont isomorphes à l'addition d'un module libre près.

**Proposition 1** *Soient  $M$  et  $M'$  deux  $A$ -modules projectifs de type fini. Alors  $[M]$  et  $[M']$  représentent la même classe dans  $K_0$  si et seulement si  $M$  et  $M'$  sont stablement isomorphes.*

La démonstration est la suivante :  $[M \oplus A^r] = [M' \oplus A^r] \Leftrightarrow [M] + [A^r] \equiv [M'] + [A^r] \Leftrightarrow [M] + [A^r] - [A^r] \equiv [M'] + [A^r] - [A^r] \Leftrightarrow [M] \equiv [M']$ .

Autrement dit,  $K_0(A)$  est le groupe des classes d'isomorphisme stable de  $A$ -modules. On a pour ainsi dire forcé la simplification par les modules libres dans le groupe  $K_0(A)$ . Lorsque pour un anneau  $A$  les libres ne se simplifient pas, on introduit par ce biais de nouvelles simplifications, si bien que  $K_0(A)$  ne reflète pas toujours bien la structure donnée par la somme directe sur l'ensemble des  $A$ -modules, et qu'il arrive que  $K_0(A)$  soit réduit à l'élément neutre (voir la question  $Q_2$ ).

*Questions.* Etant donné un anneau  $A$ , on peut se poser les questions suivantes :

$Q_1$  Est-ce que tous les  $A$ -modules projectifs sont libres ?

La réponse est oui si  $A$  est un corps, si  $A = \mathbb{Z}$ , si  $A$  est un anneau principal, ou si  $A$  est un anneau de polynômes sur un corps. Pour ce dernier cas, la question a été posée par J.-P. Serre vers 1950, et résolue indépendamment par Quillen et Suslin. On a vu que la réponse était non dans le cas d'un anneau de matrices.

$Q'_1$  Est-ce que tous les  $A$ -modules projectifs sont stablement libres ?

C'est un affaiblissement de la première question. Il y a des exemples d'anneaux d'entiers de corps de nombres (des extensions de  $\mathbb{Q}$  par le groupe quaternionien d'ordre 32  $\mathbb{H}_{32}$  données par Swan) possédant des modules stablement libres mais non libres. Si la réponse est oui pour un anneau  $A$ , alors on a pour tout  $M$ , des entiers  $r$  et  $s$  tels que  $M \oplus A^s \simeq A^r$  d'où, dans  $K_0(A)$ ,  $[M] \equiv [A^r] - [A^s] \equiv [A^{r-s}]$ , et dans ce cas  $K_0(A)$  est le groupe cyclique engendré par  $[A]$ . La réponse est encore non pour l'anneau  $M_n(k)$  de matrices carrées de dimension  $n$  sur un corps  $k$ ; en fait  $K_0(M_n(k))$  est engendré par la classe de l'espace vectoriel  $k^n$ .

Q<sub>2</sub> Est-ce que deux modules stablement isomorphes sont isomorphes ?

Autrement dit, peut-on simplifier par les modules libres ?

Si oui, alors en particulier les modules stablement libres sont libres. Si la réponse aux questions Q<sub>1</sub>' et Q<sub>2</sub> est oui, alors tous les modules projectifs sont libres, et  $K_0(A) = \langle [A] \rangle \simeq \mathbb{Z}$  est cyclique infini. Un exemple d'anneau pour lequel la réponse à Q<sub>2</sub> est négative est l'anneau d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension infinie sur un corps. Pour un tel anneau  $A$ , on a  $A \oplus A \simeq A$ . En fait, dans ce cas,  $K_0(A) = \{0\}$ .

*Simplification.* Soient  $P, Q$ , et  $N$  des  $A$ -modules tels que  $P \oplus N \simeq P \oplus Q$ ; a-t-on  $P \simeq Q$  ?

*n-simplification.* Soient  $P$  et  $Q$  des  $A$ -modules tels que  $P \oplus \dots \oplus P \simeq Q \oplus \dots \oplus Q$  ( $n$  copies de  $P$  et de  $Q$ ); a-t-on  $P \simeq Q$  ? Des contre-exemples sont donnés par des anneaux tels que  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ,  $\mathbb{Z}[\zeta_{23}]$ ,  $\mathbb{Z}[X]$ .

*M<sub>n</sub>-simplification.* Soient  $A$  et  $B$  des anneaux tels que les algèbres de matrices  $M_n(A)$  et  $M_n(B)$  soient isomorphes. A-t-on  $A \simeq B$  ?

On a la simplification et la  $n$ -simplification sur tous les anneaux pour lesquels le théorème de Krull-Schmidt de décomposition unique des modules est valable. Il en va ainsi par exemple des anneaux principaux, des anneaux artiniens, des algèbres qui sont des modules de type fini sur un anneau local complet tel que  $\mathbb{Z}_p$ . On peut aussi avoir la simplification et la  $n$ -simplification sans le théorème de Krull-Schmidt, par exemple pour des algèbres finies sur un anneau commutatif local.

Dans une situation où les modules se simplifient, on peut se demander si l'on a des simplifications similaires lorsque l'on ajoute une structure hermitienne.

## 2. Formes hermitiennes sur les anneaux

Soit  $A$  un anneau muni d'une anti-involution  $\bar{\phantom{a}} : A \rightarrow A$  (i.e. une application bijective telle que, pour tous  $a, b \in A$ ,  $\overline{\overline{a}} = a$  et  $\overline{ab} = \overline{b} \overline{a}$ ). Soit  $M$  un  $A$ -module à gauche, projectif de type fini.

*Definitions.* Une *forme hermitienne* sur  $M$  est une application  $h : M \times M \rightarrow A$  qui est bi-additive, sesquilinéaire (i.e. pour tous  $a, b \in A, m, n \in M$ , on a  $h(am, bn) = ah(m, n)\bar{b}$ ) et telle que pour tous  $m, n \in M, h(n, m) = \overline{h(m, n)}$ .

Lorsque par exemple  $A$  est un anneau commutatif ou un corps et que l'anti-involution est l'identité, les formes hermitiennes sont les formes bilinéaires symétriques. Si de plus 2 est inversible dans  $A$ , elles correspondent bijectivement aux formes quadratiques : on pose  $q(m) = h(m, m)$  et  $h(m, n) = \frac{1}{2}(q(m+n) - q(m) - q(n))$ .

On note  $M^\perp = \{m \in M ; \forall n \in M, h(m, n) = 0\}$ . Une forme hermitienne est dite *régulière* si  $M^\perp = \{0\}$ .

On appelle *module hermitien* une paire  $(M, h)$  formée d'un module et d'une forme sur ce module.

Un *morphisme* (resp. *isomorphisme*) de modules hermitiens de  $(M, h)$  dans  $(M', h')$  est un morphisme (resp. isomorphisme) de  $A$ -modules  $f : M \rightarrow M'$  tel que  $h'(fm, fn) = h(m, n)$  pour tous les  $m, n \in M$ . On étudie l'ensemble des modules hermitiens à isomorphisme près.

La *somme directe* de deux modules hermitiens  $(M, h) \oplus (M', h')$  est un module hermitien  $(M \oplus M', h \oplus h')$  où l'on pose  $(h \oplus h')(m + m', n + n') = h(m, n) + h'(m', n')$  pour tous  $m, n \in M, m', n' \in M'$ .

Si le module  $M$  est libre, de base  $(e_1, \dots, e_r)$ , on peut représenter  $h$  par une matrice  $B = (b_{ij})_{i,j}$  où  $b_{ij} = h(e_i, e_j)$ . On a alors  $h(m, n) = (m^t)B(\bar{n})$ . Deux formes sont isomorphes si et seulement si elles sont représentées par des matrices congruentes :  $B' = P^tBP$ , pour une matrice inversible  $P$ .

*Simplification de modules hermitiens.* Si  $A$  est un anneau local (i.e. ayant un seul idéal maximal) dans lequel 2 est inversible, ou si  $A$  est un corps, tous les modules projectifs sont libres, et toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale. Dans une telle situation, où l'on a la simplification des modules, on se demande si les modules hermitiens se simplifient.

Le premier résultat important de la théorie des formes quadratiques qui concerne toutes les formes sur un corps, et non plus des formes ou des familles de formes particulières, comme par exemple les sommes de  $n$  carrés ou les formes binaires, a été démontré par Witt en 1937 :

**Théorème de simplification de Witt :** *Soit  $k$  un corps, alors on a la simplification pour les modules bilinéaires symétriques réguliers. Autrement dit, soient  $(V, q)$ ,  $(V_1, q_1)$ ,  $(V_2, q_2)$  trois modules bilinéaires symétriques sur  $k$  tels que*

$$(V_1, q_1) \oplus (V, q) \simeq (V_2, q_2) \oplus (V, q)$$

alors

$$(V_1, q_1) \simeq (V_2, q_2)$$

La démonstration est géométrique, on y étend des isométries en utilisant le lemme de Cartan-Dieudonné ([3])

On a pu généraliser ce résultat à une grande classe d'anneaux, commutatifs ou non (mais pour lesquels on a la simplification des modules), qui contient par exemple des algèbres de matrices  $M_n(\mathbb{Z}_p)$ , où  $\mathbb{Z}_p$  est l'anneau des entiers  $p$ -adiques ( $p \neq 2$ ), et les anneaux de groupes  $\mathbb{Z}_p[G]$  pour les groupes finis  $G$ .

**Théorème 1** ([11], [21]) : *Soit  $A$  un anneau muni d'une anti-involution, qui est une algèbre libre de type fini comme module sur un anneau de valuation discrète complet, et dont le centre contient un élément  $a$  tel que  $a + \bar{a} = 1$  (par exemple  $\frac{1}{2}$  si 2 est inversible dans  $A$ ). Alors on a la simplification pour tous les modules hermitiens sur  $A$ .*

La démonstration fait intervenir des arguments de la théorie des catégories pour représenter les modules hermitiens sur  $A$  par des formes hermitiennes dans une autre catégorie. On représente ensuite ces formes par des formes plus simples sur des anneaux plus compliqués. On réduit alors la question à celle de la simplification sur les corps et on utilise le théorème de Witt.

Cependant, il ne faut pas avoir l'impression que la simplification des modules hermitiens suit en général la simplification des modules : voyons simplement comme contre-exemple le cas de l'anneau  $\mathbb{Z}$  et des formes unimodulaires (i.e. représentées par des matrices inversibles). Il y a bien sûr moins de matrices inversibles sur  $\mathbb{Z}$  que sur  $\mathbb{Q}$ , mais cela signifie surtout qu'il y a beaucoup moins d'isomorphismes de formes, en particulier les formes symétriques ne sont pas toutes diagonalisables, et l'ensemble des formes unimodulaires sur  $\mathbb{Z}$  est bien plus difficile à décrire.

Prenons par exemple ([3] 1.6), sur  $V = \mathbb{Z}^2$ , les formes quadratiques  $q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ces formes ne sont pas isomorphes, en effet,  $q_1((x, y)) = 2xy + y^2$  peut prendre toutes les valeurs dans  $\mathbb{Z}$  alors que  $q_2((x, y))$  ne prend que des valeurs paires.

Or,  $q_1 \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \simeq q_2 \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ , comme le montre la congruence de matrices suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si l'on rend 2 inversible en se plaçant sur l'anneau  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ , alors  $q_1 \simeq q_2$  et ces formes ne fournissent plus un contre-exemple.

Cependant, on trouve aussi des contre-exemples plus fondamentaux, qui reposent sur le fait que  $\mathbb{Z}$  n'est pas complet (voir [4]) ; les formes unimodulaires impaires indéfinies sont toutes isomorphes à des formes diagonales n'ayant que des 1 et des  $-1$  sur la diagonale. Elles sont donc classifiées par le rang et la signature (nombre de 1 moins le nombre de  $-1$  dans la forme diagonale) Or, les formes paires définies positives sont  $\Gamma_8$  en rang 8,  $\Gamma_8 \oplus \Gamma_8$  et  $\Gamma_{16}$  en rang 16. Les formes  $\Gamma_8 \oplus \Gamma_8$  et  $\Gamma_{16}$  isomorphes après addition d'un plan hyperbolique  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . En rang 32, il y a plus de 80 millions de classes d'isomorphismes. En ajoutant à de telles formes un plan hyperbolique, on obtient des formes indéfinies impaires de rang 34 et de signature 30, donc toutes isomorphes. On voit ici que l'on est loin de pouvoir simplifier !

Ceci illustre la difficulté que l'on a sur  $\mathbb{Z}$  à utiliser une structure de groupe sur l'ensemble des formes unimodulaires. En effet, deux formes qui sont stablement isomorphes correspondent forcément au même élément du groupe, or comme on a vu que de telles formes pouvaient ne pas être isomorphes, le groupe de Witt, qui est l'outil principal de représentation des formes sur un corps, ne peut pas refléter la richesse de l'ensemble des formes sur un anneau où la simplification de Witt ne fonctionne pas.

## Références

- [1] *E. Bayer-Fluckiger, L. Fainsilber*, Non-unimodular Hermitian forms, *Inventiones Mathematicae*, à paraître.
- [2] *L. Fainsilber*, Formes hermitiennes sur les algèbres  $p$ -adiques, thèse, Université de Franche-Comté (1994).
- [3] *W. Scharlau*, Quadratic and Hermitian Forms, *Grundlehren der Math : Wiss.* **270**, Springer Verlag (1985).
- [4] *J.-P. Serre*, Cours d'arithmétique, P.U.F., Paris (1970).

Laboratoire de Mathématiques  
 Université de Franche-Comté  
 16 route de Gray  
 25030 Besançon  
 email : [laura@vega.univ-fcomte.fr](mailto:laura@vega.univ-fcomte.fr)



# Theorie de Galois constructive

*Annick Valibouze*

Cet article présente la correspondance entre les groupes finis et les resolvantes de Lagrange et montre comment elle est utilisée pour les problèmes de Galois direct et inverse.

## Introduction

Soit  $k$  un corps de caractéristique 0. Nous considérons un polynôme  $f$ , sans facteur multiple, de degré  $n$  et à coefficients dans  $k$ . L'étude des racines du polynôme  $f$  se réalise à travers l'idéal  $I$  des relations algébriques entre ces racines. Le calcul effectif de cet idéal est algorithmiquement possible mais extrêmement coûteux. Il est en fait presque toujours irréalisable (voir [30] et [1]). En revanche, cet idéal permet d'exhiber des outils pour obtenir des informations sur les racines du polynôme  $f$ . En particulier, l'ensemble des permutations pour lesquelles ces relations restent invariantes est un groupe fini identifié par Evariste Galois à l'ensemble des permutations qui échangent les racines d'un facteur irréductible simple sur  $k$  de la *résolvante de Galois* de  $f$  (voir le paragraphe 1 et [15]). Ce groupe fini est noté  $\text{Gal}_k(f)$  et appelé *groupe de Galois du polynôme  $f$  sur  $k$* . Le groupe de Galois de  $f$  sur  $k$  est isomorphe au groupe des  $k$ -automorphismes du corps de décomposition de  $f$ .

Tous les sous-corps du corps de décomposition du polynôme  $f$  s'obtiennent à partir de tous les sous-groupes de  $\text{Gal}_k(f)$  et réciproquement. Cette correspondance entre des groupes et des corps s'appelle la *correspondance galoisienne*. La correspondance de Lagrange entre des corps et des resolvantes (définies au paragraphe 1) est à la base de la correspondance galoisienne. Cette présentation définit ce que sont les *resolvantes* et décrit la correspondance entre les resolvantes et les groupes. Cette correspondance utilise la correspondance galoisienne et s'appuie sur le théorème de conservation de l'élément primitif (voir le paragraphe 3).

La correspondance entre les groupes et les resolvantes permet d'obtenir tous les algorithmes pour déterminer le groupe de Galois d'un polynôme avec des resolvantes et donc d'en extraire le meilleur. Pour une implantation efficace, il est nécessaire de coupler cet algorithme avec des techniques modulaires (voir [23], [18] ou [31]).

Cette nouvelle correspondance offre également des réponses partielles très simples au *problème de Galois inverse* : étant donné un groupe fini, chercher s'il existe un polynôme dont il soit le groupe de Galois (voir paragraphe 2).

La recherche effective du groupe de Galois d'un polynôme nécessite des calculs de resolvantes. Les différentes méthodes ne seront pas abordées ici (voir par exemples [5], [7], [12], [19], [20],[26], [27], [28], [34],...). En **Macsyma**, les resolvantes se calculent avec l'extension **SYM** (voir [22] et [29]).

Dans toute la suite, nous nous donnons un ensemble d'indéterminées  $x_1, \dots, x_n$ . Le groupe symétrique de degré  $n$  est noté  $S_n$ . Nous nous donnons également  $L$ , un

sous-groupe quelconque de  $S_n$ , et  $H$ , un sous-groupe quelconque de  $L$ . Nous fixons  $\mathcal{T} = \{\tau_1, \dots, \tau_e\}$ , une transversale gauche de  $L \bmod H$  (i.e.  $L/H = \{\tau_1 H, \dots, \tau_e H\}$ ).

## 1. Résolvantes

Dans son mémoire Réflexions sur la résolution algébrique des équations, Lagrange trace un historique fort intéressant (voir [19]). Pour les degrés 3 et 4, il présente les méthodes employées pour résoudre les équations, en essayant de les comparer. Puis, pour chaque méthode, il s'emploie à montrer qu'un même outil, qu'il appelle *resolvante*, est utilisé. Lagrange écrit dans son travail : "Cet examen aura un double avantage ; d'un côté il servira à répandre une plus grande lumière sur les résolutions connues du troisième et du quatrième degré ; de l'autre il sera utile à ceux qui voudront s'occuper de la résolution des degrés supérieurs, en leur fournissant différentes vues pour cet objet et en leur épargnant surtout un grand nombre de pas et de tentatives inutiles Lagrange disait vrai. Après lui, l'étude des équations ne pourra plus, comme auparavant, être menée à coups d'astuces.

*Actions de groupes et invariants.*

Le groupe symétrique  $S_n$  agit naturellement sur le corps des fractions  $k(x_1, \dots, x_n)$  : soient  $\sigma \in S_n$  et  $P \in k(x_1, \dots, x_n)$  alors  $\sigma.P(x_1, \dots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ . Soit  $E$  un sous-ensemble de  $S_n$ , l'*orbite de P sous l'action de E*, notée  $E.P$  est  $\{\tau.P \mid \tau \in E\}$ . Pour tout sous-groupe  $G$  de  $S_n$  agissant sur un corps  $K$ , le sous-corps de  $K$  constitué par les éléments de  $K$  invariants par  $G$  est noté  $K^G$ .

Un polynôme  $\Theta$  de  $k[x_1, \dots, x_n]$  est un *invariant primitif de H relativement à L* si  $H = \{\sigma \in L \mid \sigma\Theta = \Theta\}$ . Si  $L = S_n$  on dit que  $\Theta$  est un *invariant primitif du groupe H*. Soit  $K = k(x_1, \dots, x_n)^{S_n}$ . Tout sous-groupe de  $L$  possède un invariant primitif (en réalité plusieurs) relativement à  $L$  et tout polynôme de  $K(x_1, \dots, x_n)^L$  est un invariant primitif d'un sous-groupe de  $L$  relativement à  $L$ . Un polynôme  $\Theta \in k[x_1, \dots, x_n]$  est un invariant primitif de  $H$  relativement à  $L$  si et seulement si  $\Theta$  est un élément primitif du corps  $K(x_1, \dots, x_n)^H$  sur le corps  $K(x_1, \dots, x_n)^L$ . Si tel est le cas, alors l'orbite  $L.\Theta$  est constituée des  $e$  fonctions distinctes  $\tau_1.\Theta, \dots, \tau_e.\Theta$ .

La recherche des invariants primitifs est souvent intuitive (voir [5], [13], [8], [25] et d'autres). Il existe néanmoins une méthode automatique de recherche d'un invariant primitif, optimale du point de vue du degré des monômes apparaissant dans son expression (voir [14]).

*Exemples.* Le polynôme  $x_1x_2$  est un invariant primitif de  $S_2 \times S_{n-2}$ . Le déterminant de Vandermonde  $\delta_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$  est un invariant primitif du groupe alterné  $\mathcal{A}_n$ . Le polynôme  $x_1x_2^2x_3^3$  est un invariant primitif du sous-groupe identité dans  $S_4$ . Le polynôme  $b_4 = x_1x_2 + x_3x_4$  est un invariant primitif du groupe diédral  $\mathcal{D}_4$  dans  $S_4$ .

*La résolvante*

Soit  $\Theta$  un invariant primitif de  $H$  relativement à  $L$ . La *résolvante (générique) par  $\Theta$  relative à  $L$* , notée  $\mathcal{L}_\Theta^L$ , est le polynôme minimal de  $\Theta$  sur  $K(x_1, \dots, x_n)^L$  où  $K = k(x_1, \dots, x_n)^{S_n}$ . Elle est formellement donnée par

$$\mathcal{L}_\Theta^L(x) = \prod_{\Psi \in L.\Theta} (x - \Psi) = \prod_{i=1}^e (x - \tau_i.\Theta) \quad (1)$$

Une telle résolvante est une *H-résolvante relative à  $L$* .

Si  $\Psi \in k(x_1, \dots, x_n)$ , une évaluation quelconque de  $\Psi$  en les  $n$  racines du polynôme  $f$  est notée  $\tilde{\Psi}$ . Cette évaluation en les racines de  $f$  est à manipuler avec prudence; en effet, si  $\tau$  est une permutation de  $S_n$ , l'égalité  $\tau\tilde{\Psi} = \tilde{\tau\Psi}$  n'a de sens que si  $\tau \in \text{Gal}_k(f)$ .

La *résolvante de  $f$  par  $\Theta$  relative à  $L$*  est le polynôme  $\mathcal{L}_{\Theta,f}^L = \widetilde{\mathcal{L}_\Theta^L}$ . Si  $\Theta$  est un invariant primitif du groupe identité  $Id_n$  dans  $S_n$ , la résolvante  $\mathcal{L}_{\Theta,f}$  est une *résolvante de Galois de  $f$*  si tous ses facteurs sont simples.

Si  $\text{Gal}_k(f)$  est inclus dans le groupe  $L$ , les coefficients de la résolvante  $\mathcal{L}_{\Theta,f}^L$  appartiennent au corps  $k$  puisque, étant invariants par  $L$ , ils le sont aussi par  $\text{Gal}_k(f)$ . Lorsque  $L = S_n$ , la résolvante  $\mathcal{L}_{\Theta,f}^L$  est notée  $\mathcal{L}_{\Theta,f}$  et appelée *résolvante de  $f$  par  $\Theta$* . Ses coefficients sont des polynômes symétriques en les racines de  $f$ .

Pour tout  $\tau$  dans  $L$ ,  $\tau.\Theta$  est un invariant primitif du conjugué  $H^\tau = \tau H \tau^{-1}$  de  $H$  dans  $L$  et la  $H^\tau$ -résolvante  $\mathcal{L}_{\tau.\Theta,f}^L$  est identique à la  $H$ -résolvante  $\mathcal{L}_{\Theta,f}^L$ .

*Exemple.* Fixons  $n = 3$  et prenons  $\Theta = x_1 x_2^2$ , alors

$$\mathcal{L}_\Theta(x) = (x - x_1 x_2^2) (x - x_1 x_3^2) (x - x_2 x_1^2) (x - x_2 x_3^2) (x - x_3 x_1^2) (x - x_3 x_2^2)$$

*Partition d'un polynôme*

A un polynôme à coefficients dans  $k$  et sans racine multiple, on associe la suite finie d'entiers  $(i_1, \dots, i_q)$  (avec  $i_1 \geq \dots \geq i_q$ ) des différents degrés des facteurs du polynôme qui sont irréductibles sur  $k$ . Cette suite d'entiers est appelée la *partition du polynôme*. Un invariant pour lequel la résolvante associée est sans facteur multiple est dit *f-séparable*.

*Exemple.* La partition du polynôme  $(x^5 + x^2 + 1)(x^3 + 3)(x^3 + x + 1)(x^2 + x + 1)(x + 5)$  est  $(5, 3, 3, 2, 1)$ , notée également sous la forme exponentielle  $(5, 3^2, 2, 1)$ .

## 2. Matrices des partitions et des groupes

Dans ce qui suit, sauf indication contraire, nous supposons que les invariants considérés sont *f-séparables*. Nous supposons, de plus, que  $\text{Gal}_k(f)$  est un sous-groupe de  $L$ .

### Matrice des partitions

La partition d'une  $H$ -résolvante de  $f$  relative à  $L$  ne dépend que de  $L$ , de  $H$  et de  $\text{Gal}_k(f)$  : on la note  $[\text{Gal}_k(f), H]_L$ . (On note  $[\text{Gal}_k(f), H]$  lorsque  $L = S_n$ .) Le groupe de Galois de  $f$  est défini à une conjugaison près (i.e. à une permutation près de ses racines) et une  $H$ -résolvante ne dépend que de la classe de conjugaison de  $H$  dans  $L$  (voir paragraphe précédent). Donc une partition  $[G, H]_L$  ne dépend que des classes de conjugaison dans  $L$  des sous-groupes  $G$  et  $H$  de  $L$ .

L'idée de construire, a priori, une matrice carrée  $\mathcal{A}_L = ([G, H]_L)_{G, H}$  est assez naturelle et possible (voir [2]). La matrice  $\mathcal{A}_L$  est appelée *matrice des partitions relative à  $L$* . Le groupe  $G$  est appelé le *groupe candidat* (i.e. candidat à être le groupe de Galois) et le groupe  $H$  est appelé le *groupe test* (i.e. à tester  $f$  avec une  $H$ -résolvante pour connaître son groupe de Galois).

Deux formules simples permettent de calculer la partition  $[G, H]_L$  : cette partition est égale à la séquence (ordonnée comme une partition) des cardinaux des orbites de  $G$  sur les classes à gauche de  $L \bmod H$  ; cette partition s'obtient également à partir des indices  $[G : G \cap H^\tau]_L$  où  $\tau$  parcourt la transversale  $\mathcal{T}$  (voir le paragraphe 3.2 dans [2]).

Le système GAP (voir [16]) a été utilisé pour le calcul des matrices  $\mathcal{A}_{S_4}, \dots, \mathcal{A}_{S_8}$ . Les matrices  $\mathcal{A}_{S_9}$ ,  $\mathcal{A}_{S_{10}}$  et  $\mathcal{A}_{S_{11}}$  sont partiellement calculées (voir [3], [17] et [32]). Ces matrices et sous-matrices sont tabulées sous forme de listes et sont exploitables dans un programme.

### Matrice des groupes

De même que pour la partition d'une résolvante, le groupe de Galois d'un facteur simple d'une  $H$ -résolvante du polynôme  $f$  relative à  $L$  ne dépend que du groupe  $L$ , du groupe test  $H$  et du groupe de Galois de  $f$  (voir [33]). Chercher à identifier, a priori, ces groupes de Galois est une idée que l'on peut trouver dans l'article d'E.H. Berwick sur le degré 6. A. Colin a également travaillé sur les différents groupes apparaissant lors de l'étude d'une résolvante (voir [11]).

L'information la plus fine concerne les facteurs irréductibles simples. La restriction aux facteurs irréductibles simples des résolvantes relatives à  $L$  induit une matrice  $\mathcal{B}_L$ , appelée *matrice des groupes relative à  $L$* . La matrice  $\mathcal{B}_L$  inclut les informations de la matrice  $\mathcal{A}_L$ .

Les groupes de Galois des facteurs simples des résolvantes sont des groupés pour lesquels le problème de Galois inverse peut être envisagé ; en effet, si le groupe de Galois  $G$  d'un facteur  $h$  de degré  $m$  d'une résolvante est connu, avec sa représentation dans  $S_m$ , le calcul de  $h$  donne un polynôme dont le groupe de Galois est  $G$ . Cette méthode utilisée avec  $m = 12$  a permis de calculer un trentaine de polynômes (voir [17]).

Les groupes de Galois des facteurs simples d'une résolvante d'un polynôme de groupe de Galois  $G$  s'obtiennent également avec un algorithme permettant d'identifier  $G$  et un polynôme connu dont le groupe de Galois est  $G$ . C'est un intérêt que

présente le problème de Galois inverse par rapport au problème direct.

Une légère modification du programme GAP qui calcule la matrice  $\mathcal{A}_L$  permet de calculer, a priori, les groupes de Galois des facteurs simples des résolvantes.

### 3. Matrices et résolvantes

Le lien entre les partitions des résolvantes et les matrices  $\mathcal{A}_L$  et  $\mathcal{B}_L$  est donné par le **Théorème de conservation de l'élément primitif** (voir [2] Théorème 6.6 et [33]) : Soit  $\Theta$  un invariant primitif de  $H$  relativement à  $L$  tel que  $\tilde{\Theta}$  soit une racine simple de la résolvante  $\mathcal{L}_{\Theta, f}^L$ . Alors,  $\tilde{\Theta}$  est un élément primitif du corps  $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{G \cap H}$  sur le corps  $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{G \cap L} = k$ , où  $G = \text{Gal}_k(f)$ .

Ce théorème permet de comprendre ce qui se passe lors de la spécialisation de la résolvante  $\mathcal{L}_{\Theta}^L$  en les racines  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de  $f$ .

*Remarque.* Avec le Théorème de conservation de l'élément primitif les résultats bien connus suivants deviennent évidents : les facteurs irréductibles de la résolvante de Galois d'un polynôme sont tous de degré égal à l'ordre du groupe de Galois de ce polynôme ( $H = Id_n$ ) ;  $G = \text{Gal}_k(f)$  est inclus dans l'un des conjugués d'un groupe test  $H$  si et seulement si il existe une  $H$ -résolvante de  $f$  qui ait un facteur linéaire simple ( $G \cap H^\tau = H^\tau$ ) ; en particulier,  $\text{Gal}_k(f)$  est pair si et seulement si le discriminant de  $f$  est un carré ( $H = \mathcal{A}_n$  et  $\Theta = \delta_n$ ).

### 4. Identification de groupes de Galois

Jusqu'en 1993, deux orientations ont été envisagées : une première, intuitive, n'utilise que des sous-matrices de  $\mathcal{A}_{s_n}$  avec des résolvantes absolues et l'autre utilise des résolvantes relatives sans exploiter les matrices  $\mathcal{A}_L$ . Les deux premiers paragraphes aborderont ces méthodes et le troisième décrira celle qui utilise les matrices  $\mathcal{A}_L$  et  $\mathcal{B}_L$ .

*Méthode intuitive utilisant  $\mathcal{A}_{s_n}$ ,*

Si une sous-matrice de  $\mathcal{A}_{s_n}$ , obtenue en retirant des groupes tests, a ses lignes distinctes, alors il est possible de déterminer le groupe de Galois du polynôme  $f$  avec les groupes tests restants. C'est le choix de ces groupes tests, de leurs invariants primitifs et des méthodes employées pour calculer les résolvantes qui a déterminé les avancées dans la recherche du groupe de Galois d'un polynôme. Si le choix des groupes tests est intuitif, les lignes de la sous-matrice de  $\mathcal{A}_{s_n}$ , induite par ce choix, ne sont donc pas nécessairement distinctes. De plus, dans la littérature, le polynôme  $f$  est toujours supposé irréductible. La première étude complète est due à E.H. Berwick en degré 6 (voir [5]). Il conserve comme groupes tests les sous-groupes maximaux de  $S_6$ .

S'inspirant des travaux d'E.H. Berwick, en 1931 H.O. Foulkes établit une sous-matrice des partitions  $\mathcal{A}_{S_7}$ , avec trois groupes tests (voir [13]). Les sept lignes de sa sous-matrice étant toutes distinctes, les trois groupes tests suffisent à identifier le groupe de Galois de tout polynôme irréductible de degré 7. Pour utiliser la méthode

de H.O. Foulkes, il est nécessaire de calculer des résultantes de degré 30 (associée à  $PSL(2, 7) = G_{168}$ ) et 120. Personne, à ce jour, n'a su calculer une  $G_{168}$ -résultante. H.O. Foulkes utilise la même méthode que E.H. Berwick pour calculer sa sous-matrice de  $\mathcal{A}_{S_\tau}$  : faire agir le groupe candidat  $G$  sur les conjugués dans  $S_n$ , d'un invariant primitif du groupe test  $H$  puis calculer le nombre d'éléments dans chaque orbite.

En 1981, L.E. Soicher et McKay ont choisi des groupes tests pour lesquels les résultantes et les partitions sont facilement calculables sur machine, c'est-à-dire des groupes non transitifs, du type  $H_m = \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_{n-m}$  ou bien  $K_m = \text{Id}_m \times \mathcal{S}_{n-m}$  (voir [26] ou [25]). Les résultantes associées aux invariants primitifs  $x_1 \cdots x_m$  et  $x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}$  de  $H_m$  et  $K_m$ , respectivement, se calculent très rapidement (voir [32] et [7]). Les sous-matrices de partitions publiées par L.E. Soicher ont été calculées par G. Butler en étudiant l'action du groupe candidat sur les  $m$ -ensembles pour les groupes tests  $H_m$  et sur les  $m$ -séquences pour les groupes tests  $K_m$ . Avec ces sous-matrices, le groupe de Galois d'un polynôme irréductible de degré inférieur ou égal à 7 s'identifie rapidement. C'est cette méthode qui est implantée dans MAPLE (voir [21]).

En 1981, G. Butler and J. McKay (voir [6]) publient la liste des sous-groupes transitifs de  $\mathcal{S}_n$  ( $n \leq 11$ ) permettant à J. McKay et E. Regener de publier des sous-matrices des matrices  $\mathcal{A}_{S_n}$  ( $n \leq 11$ ) pour les groupes tests du type  $H_m$  et  $K_m$  et des groupes candidats transitifs (voir [24]). Mais ces groupes tests ne suffisent pas en degré 8, 9, 10 et 11 (i.e. les lignes de ces sous-matrices ne sont pas distinctes).

#### *Méthodes des résultantes relatives*

L'utilisation des résultantes relatives à un sous-groupe strict  $L$  de  $S_n$  a été initiée par R.P. Stauduhar (voir [28]). Sa méthode, reprise plus tard par Y. Eichenlaub et M. Olivier (voir [10]), consiste à tester l'inclusion du groupe de Galois dans des sous-groupes de  $S_n$ . En effet, si  $\text{Gal}_k(f)$  est un sous-groupe de  $L$  et si la résultante  $\mathcal{L}_{\Theta, f}^L$  a un facteur linéaire simple  $(x - \tau \cdot \Theta)$  sur  $k$ , alors le groupe de Galois de  $f$  est un sous-groupe du conjugué  $H^\tau$  de  $H$  (voir Remarque du paragraphe 3). L'algorithme de Stauduhar démarre en testant l'inclusion de  $\text{Gal}_k(f)$  dans chaque sous-groupe maximal de  $S_n$ , (au départ les résultantes sont donc absolues) puis descend dans le graphe des sous-groupes en réordonnant les racines de  $f$  en fonction du conjugué dans lequel le groupe de Galois de  $f$  est inclus. L'algorithme s'arrête sur  $L$  tel que, pour tout sous-groupe maximal  $H$  de  $L$ , aucune  $H$ -résultante n'a de facteur linéaire simple. A ce stade  $\text{Gal}_k(f) = L$ . La méthode de calcul des résultantes, proposée par Stauduhar, est numérique. Il existe un algorithme de recherche de groupe de Galois entièrement algébrique s'inspirant de la méthode de Stauduhar (voir [12]).

#### *Utilisation de la matrice $\mathcal{B}_L$*

Cas  $L = \mathcal{S}_n$

Les lignes de la matrice carrée des partitions  $\mathcal{A}_{S_n}$  sont distinctes deux à deux (voir [2] Théorème 3.1). Ce qui signifie qu'il est toujours possible de trouver le groupe de

Galois d'un polynôme séparable, non nécessairement irréductible, avec les partitions des résolvantes absolues.

Comme la matrice  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_n}$  contient toutes les informations de la matrice  $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_n}$ , ses lignes sont également distinctes. Cette matrice livre toutes les possibilités d'utilisation de résolvantes absolues, il devient possible d'élaborer le "meilleur" algorithme permettant d'identifier le groupe de Galois d'un polynôme de degré  $n$ , par l'unique étude des résolvantes absolues.

L'utilisation de la matrice  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_n}$  permet parfois de départager les groupes candidats plus rapidement qu'avec uniquement les partitions des résolvantes absolues (voir l'exemple 1) et elle permet de départager des groupes candidats alors que la sous-matrice de  $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_n}$  calculée sur machine ne suffit pas (voir l'Exemple ??) ;

Les temps nécessaire au calcul des résolvantes et à leur factorisation conditionnent les critères de sélection et d'ordonnement des groupes tests. Ces critères sont donc l'indice d'un groupe test  $H$  dans  $S$ , et la rapidité de calcul d'une  $H$ -résolvante. Par exemple, le premier groupe test est toujours  $H = S_1 \times S_{n-1}$  dont une résolvante associée est le polynôme  $f$  lui-même, qu'il suffit de factoriser. A priori, le second groupe test est le groupe alterné avec  $\delta_n$  comme invariant primitif (voir Remarque du paragraphe 3).

#### *Exemples.*

1. Avec seulement les partitions des résolvantes absolues, il est coûteux de départager trois sous-groupes  $T_{25}$ ,  $T_{36}$  et  $T_{48}$  de  $\mathcal{S}_8$ . Soit  $H$  le sous-groupe de  $\mathcal{S}_8$  d'indice 35 dont  $x_1x_2x_3x_4x_5^2x_6^2x_7^2x_8^2$  est un invariant primitif. Si  $f$  a  $T_{25}$ ,  $T_{36}$  ou  $T_{48}$  comme groupe de Galois, alors il existe une  $H$ -résolvante de  $f$  qui ait un facteur simple de degré 7. Le groupe de Galois de ce facteur est différent selon que celui de  $f$  est  $T_{25}$ ,  $T_{36}$  ou  $T_{48}$ . La détermination de ces groupes est alors très rapide (voir [33]).

2. Dans la sous-matrice de  $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{10}}$  calculée avec GAP, les lignes de deux groupes candidats  $T_{38}$  et  $T_{39}$  sont identiques (i.e. on ne sait pas les départager avec des partitions). Mais les lignes de  $T_{38}$  et  $T_{39}$  sont distinctes dans la sous-matrice de  $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_{10}}$ . Il est donc possible de les départager (voir [33]).

#### *Cas général*

Lorsque  $L \neq \mathcal{S}_n$ , la matrice des groupes  $\mathcal{B}_L$  permet d'exploiter toute la factorisation de la résolvante  $\mathcal{L}_{\Theta, f}^L$  pour déterminer le groupe de Galois de  $f$ , plutôt que de se contenter seulement des facteurs linéaires. La distinction habituellement faite entre la recherche par les résolvantes relatives et celle par les résolvantes absolues n'a donc pas lieu d'être. La méthode générale consiste à calculer et à factoriser d'abord des résolvantes absolues rapides à obtenir puis, à chaque étape, à évaluer la complexité effective des différents calculs possibles de résolvantes (absolues ou relatives) pour déterminer la plus intéressante à calculer et à factoriser. Restreinte à la matrice  $\mathcal{A}_L$ , cette méthode appelée *la chasse aux résolvantes relatives* est préconisée dans [2] page 29.

*Remarque.* La parité du groupe de Galois d'un facteur est aussi une information intéressante, même quand le degré du facteur est supérieur à celui de  $f$ .

## 5. Résolvantes non séparables

Dans ce qui précède, il est supposé que les invariants sont  $f$ -séparables, ce qui est loin de refléter la réalité. Mais, pour tout sous-groupe  $H$  de  $S_n$ , il existe une  $H$ -résolvante  $f$ -séparable (voir [2] Théorème 4.5). Il existe également des résolvantes séparables pour tout  $f$ ; par exemple la résolvante de Cayley est séparable pour tout polynôme irréductible (voir [2] Théorème 10.9).

Soit  $\Theta$  un invariant non  $f$ -séparable. Une méthode est de remplacer  $f$  par une résolvante de Tschirnhaus, avec  $H = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_{n-1}$  et  $\Theta \in k[x_1]$ . Si la résolvante  $\mathcal{L}_{\Theta, f}$  est sans facteur multiple, alors son groupe de Galois est celui de  $f$ . Une autre est de transformer l'invariant primitif non  $f$ -séparable (voir [12]). Ces méthodes présentent l'inconvénient d'accroître les coefficients. Elles peuvent parfois être évitées avec le Théorème des multiplicités (voir [2] Théorème 10.6 et Remarque 14).

## 6. Factorisation des résolvantes

Il n'est pas toujours nécessaire de factoriser toute une résolvante. Par exemple, la matrice  $\mathcal{A}_{S_6}$  fait apparaître que  $H_{12}$ , le sous-groupe pair d'ordre 36 dans  $\mathcal{S}_6$ , départage les groupes  $D_6$  et  $Z_6$  (le groupe diédral et le groupe cyclique, respectivement) avec comme partitions  $[D_6, H_{12}] = (2, 6, 12)$  et  $[Z_6, H_{12}] = (2, 6^3)$  (voir [3]). Il suffit donc de ne factoriser qu'un facteur de degré 12, pour départager les deux groupes. Dans ce cas c'est possible, puisque l'invariant  $\delta_6 b_6$  de  $H_{12}$  permet d'obtenir le facteur de degré 12 de la résolvante associée  $\mathcal{L}_{\delta_6 b_6, f}$  à partir du facteur de degré 6 de la résolvante  $\mathcal{L}_{b_6, f}$  (à supposer que  $f$  ait  $D_6$  ou  $Z_6$  comme groupe de Galois) (voir [3]). Dans d'autres cas, ce sont les facteurs irréductibles de petits degrés de la résolvante qui permettent de départager les groupes. C. J. Williamson réalise des factorisations partielles pour calculer le groupe de Galois d'un polynôme de degré 24 (voir [9]).

Une implantation est réalisée dans le système de calcul formel AXIOM et des optimisations sont en cours (voir [4] et [20]).



## Références

- [1] *H. Anai, M. Noro, K. Yokoyama*, Computation of the splitting field and the Galois groups of polynomials, présentation orale à MEGA94
- [2] *J.-M. Arnaudiès, A. Valibouze*, Lagrange resolvents, MEGA 96, à paraître au J.P.A.A., eds. A. Cohen et M.-F. Roy (Rapport interne LITP 93-61).
- [3] *J.-M. Arnaudiès, A. Valibouze* Groupes de Galois de polynômes en degré 4 à 11, Rapports internes LITP 94.25, 94.30, 94.48, 94.49, 94.50.
- [4] AXIOM The Scientific Computation System, R. Jenks, R. Sutor, Springer-Verlag 1992, ISBN 0-387-97855-0
- [5] *E.H. Berwick* On soluble sextic equations, Proc. London Math. Soc. (2) **29**, 1-28 (1929).
- [6] *G. Butler, J. McKay*, The transitive groups of degree up to 11, Comm. Algebra **11**, 863-911 (1983).
- [7] *D. Casperson, J. McKay*, Symmetric functions, m-sets, and Galois groups, à paraître dans Math. Comp.(1994).
- [8] *A. Cayley*, On a new auxiliary equation in the theory of equation of the fifth order, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, CLL (1861).
- [9] *C. J. Williamson*, On algebraic construction of tri-Diagonal matrices, soumis aux Proceedings of CNTA-4 (Canadian Number Theory Association) (1994).
- [10] *H. Cohen*, A Course in Computational Algebraic Number Theory, Graduate Texts in Mathematics **138**, Springer Verlag, 1993.
- [11] *A. Colin*, Théorie de Galois effective et implantation en AXIOM, Mémoire de DEA
- [12] *A. Colin*, Formal Computation of Galois groups using relative resolvent polynomials, AAECC'95 (Paris, Juillet 1995), LNCS **948**.
- [13] *H.O. Foulkes*, The resolvents of an equation of seventh degree, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 9-19 (1931).
- [14] *K. Girstmair*, On invariant polynomials and their application in field theory Maths of Comp., vol. 48, no 178, 1987 (781-797).
- [15] *E. Galois*, Oeuvres Mathématiques, publiées sous les auspices de la SMF, Gauthier-Villars, 1897.

- [16] G.A.P. Groups, Algorithms and Programming, Martin Schönert and others, Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule, Aachen, **93**, gap@samson.math.rwth-aachen.de
- [17] *I. Gil-Delessalle, A. Valibouze*, Galois inverse problem for some subgroups of degree 12, prépublication LITP 1996.
- [18] *J.-C. Lagarias, A.M. Odlyzko*, Effective versions of the Chebotarev density theorem, Algebraic Number Fields (L-functions and Galois Theory), A. Frolich, ed., Academic Press, 1977, pp. 409-464.
- [19] *J.-L. Lagrange*, Réflexions sur la résolution algébrique des équations, Mémoires de l'Académie de Berlin, (Oeuvres de Lagrange tome IV, 205-421).
- [20] *F. Lehobey*, Algorithmic methods and practical issues in the computation of Galois groups of polynomials, Mémoire de DEA, Université de Rennes I, (1994).
- [21] MAPLE 3 volumes : Maple V - Maple Language Reference Manual, Maple V - Maple Library Reference Manual, Maple V - First Leaves : A Tutorial Introduction to Maple, Springer-Verlag.
- [22] MAXIMA Maxima DOE maintenu par W. Schelter.
- [23] *J. McKay*, Some remarks on computing Galois groups, SIAM J. Comput. 8, 344-347 (1979).
- [24] *J. McKay, E.Regener*, Actions of permutation groups on r-sets, Communications in Algebra, 13(3), 619-630 (1985).
- [25] *J. McKay, L. Soicher*, Computing Galois Groups over the rationals, Journal of number theory **20**, 273-281 (1985).
- [26] *L. Soicher*, The computation of the Galois groups, Thèse du Department of Computer Science, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada, (1981).
- [27] *L. Soicher*, An Algorithm for Computing Galois Groups, Computational Group Theory, Academic Press, London, 291-296 (1984)
- [28] *R.P. Stauduhar*, The determination of Galois groups, Math. Comp. 27, 981-996 (1973).
- [29] Extension SYM de MACSYMA, manuel de l'utilisateur, A. Valibouze A.
- [30] *N. Tchebotarev*, Grundzüge des Galois'schen Theorie, P. Noordhoff (1950 ).
- [31] *B.L. Van der Waerden*, Modern Algebra, Vol. 1 Ungar New York (1953).

- [32] *A. Valibouze*, Mémoire d'habilitation à diriger les recherches, Université Paris 6, 1994.
- [33] *A. Valibouze*, Computation of the Galois group of the resolvent factors for the direct and inverse Galois problems, Conference AAECC'95 (Paris, juillet 1995), LNCS 948.
- [34] *A. Valibouze*, Modules de Cauchy, polynômes caractéristiques et résolvantes, Rapport interne LITP 95-62.

Projet Galois du GDR de Calcul Formel MEDICIS  
L.I.T.P., Université Paris VI,  
4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05  
avb@medicis.polytechnique.fr



# *A propos de femmes*



PINA

BAUSCH

*Delahaye*  
Bärenreiter 1989

## A la mémoire de Sandrine Koraty

Sandrine était étudiante en thèse à l'Université Paris-Nord : elle avait contacté l'association femmes et mathématiques au début de l'année 1996 et s'était proposée pour participer aux permanences le vendredi après-midi à l'IHP.

Elle avait effectivement commencé un travail de tri sur les ressources documentaires de l'association. Elle avait participé à une réunion de bureau début avril, puis à la réunion organisée par l'Association Science Technologie Société (ASTS) à Paris sur le sujet femmes et mathématiques.

Sandrine était extrêmement enthousiaste, pleine de projets, et nous avons eu l'occasion de connaître un peu son parcours pas toujours facile.

Sandrine est morte le 22 octobre 1996.

*Colette Guillopé*

J'ai rencontré Sandrine lors de la soirée-débat que j'ai animée le 11 avril 1996 à l'ASTS. Je me souviens de son beau sourire et de son enthousiasme quand elle a pris la parole. Elle a commencé à parler de son bégaiement (elle ne bégayait plus, mais une très légère hésitation s'entendait encore), de ses difficultés à parler français quand elle était arrivée en France vers 12 ans. Se cumulant avec le fait qu'elle était noire, ces difficultés d'expression ont provoqué des réactions de rejet de la part de ses camarades de classe. Elle a évoqué sa dépression et enfin son salut par les mathématiques qu'elle adorait, et son enthousiasme pour femmes et mathématiques. Elle était volubile sans être excitée, et très éloquente. Très heureuse de participer au débat et très attentive à ce qui se disait dans cette soirée vraiment réussie. Je lui ai parlé après, pendant le pot. Je n'ai pas retenu le titre de sa thèse, c'était de la topologie algébrique très abstraite, je me souviens qu'elle était si heureuse et si fière d'en prononcer le titre (ces longues phrases sont des véritables exploits pour des ex-bègues).

Elle m'avait beaucoup touchée. J'avais retenu de ce qu'elle avait dit un thème qui est cher à la gauchère que je suis : les mathématiques peuvent être un moyen de lutter contre une singularité corporelle, un handicap physique. Certaines personnes peuvent y être à l'aise alors qu'ailleurs elles sont parfois embarrassées de leur corps ou ont du mal avec les autres.

*Marie-Françoise Roy*

Sandrine Koraty est née en 1970 Madagascar. Après trois années de classe préparatoire, elle fait un second cycle à l'Université de Tours. Ensuite, elle vient à Jussieu s'inscrire en DEA. Je l'ai connue en février 1995, lui proposant alors de diriger son mémoire de DEA en topologie algébrique. Elle a fait une soutenance très brillante en juin 1995 (17/20). Pendant toute cette période où je l'ai fait travailler, j'ai beaucoup apprécié sa vivacité d'esprit, la facilité avec laquelle elle assimilait des notions nouvelles. Elle semblait destinée à faire une thèse très rapidement.

Pendant l'année scolaire 1995-1996, elle a commencé à préparer une thèse à l'Université Paris-Nord, sous la direction de Bob Oliver. Elle était allocataire de recherche

et semblait ravie de se lancer dans la recherche mathématique ; elle était très présente au laboratoire. Elle débordait d'enthousiasme pour tout. Brutalement, en mai 1996, on ne la voit plus et on apprend, par sa mère, qu'elle est hospitalisée. Elle revient, une seule fois, à l'Université Paris Nord, le lundi 14 octobre 1996. Elle est complètement changée, a l'air très triste, ne veut pas parler de sa maladie.

*Micheline Vigué*



Déjà très éprouvées par la disparition de Sandrine Koraty, nous avons été bouleversées d'apprendre que deux autres étudiants en thèse de mathématiques de l'Université Paris-Nord, Mohammed Benchaou et Younes Nait Slimane, ont trouvé la mort, dans l'attentat du RER à Port-Royal du mardi 3 décembre. Le communiqué suivant a été diffusé par nos collègues de Paris Nord.

### **Communiqué de l'Université Paris-Nord**

Voici quelques informations à l'intention de tous ceux qui partagent notre émotion et notre indignation après le décès de Mohammed Benchaou et de Younes Nait Slimane victimes de l'attentat du RER à Port-Royal. Ils préparaient tous deux une thèse de mathématiques à l'Université Paris-Nord. Leur très grande gentillesse les rendait particulièrement agréables et tous ceux qui les côtoyaient sont profondément affectés par leur brutale disparition.

Mohammed Benchaou est né le 16 janvier 1971 à El Jadida au Maroc. Il est décédé le 5 décembre. C'est en 1991 qu'il a commencé ses études en second cycle à l'Université Paris-Nord, où il a été très vite remarqué pour son intelligence et sa vivacité d'esprit. Il a obtenu successivement la licence, la maîtrise puis le DEA de Mathématiques avec la mention bien. Il lui a été accordé à titre exceptionnel une bourse du Ministère de la Recherche, et il était également moniteur depuis 1994. Il préparait sa thèse sur le sujet Estimations exponentielles en théorie de la diffusion, dans le domaine de la physique mathématique, sous la direction d'André Martinez. Il avait obtenu des résultats très significatifs et sa thèse devait être soutenue d'ici la fin de l'année universitaire.

Younes Nait Slimane est né le 21 janvier 1968 à Rabat au Maroc. Il était marié avec Yasmin depuis janvier 1996. Il est décédé le 8 décembre. Après avoir suivi un 2ème cycle à l'Université de Tours, il a obtenu un DEA de mathématiques en 1994 à l'Université Paris 13 avec la mention assez bien. C'était un très bon étudiant, avec qui les conditions de travail étaient très agréables. Il finançait lui-même une grande partie de ses études par des gardes de nuit. Il préparait sa thèse sur le sujet Convergence des schémas de volumes finis pour des équations paraboliques dégénérées mises en oeuvre dans des cas de transferts d'eau en milieux poreux, en analyse appliquée, sous la direction de Robert Eymard. Il faisait preuve de persévérance, de générosité, d'intelligence et il avait déjà obtenu des résultats importants. Il consacrait une part importante de ses loisirs à venir en aide à ses compatriotes dans leurs démêlés avec l'administration.



## Observatoire de l'imparité

### **Menaces sur le droit à la maternité des allocataires de recherche Allocataire de recherche, salaire ou bourse ?**

En mars 1996, le Ministère de l'éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche (MENESR) a envoyé une circulaire à tous les rectorats leur demandant de ne plus suspendre les allocations de recherche en cas de congé maternité ou maladie, à partir du 1er avril 1996. Il était précisé que les congés ayant débuté avant cette date donneraient lieu à suspension. Certains rectorats ont aussitôt interprété le texte comme signifiant que les congés démarrant après le 1er avril n'entraîneraient ni suspension de l'allocation, ni possibilité de prolongation exceptionnelle du contrat de l'allocataire.

Il s'est avéré que le MENESR avait décidé d'envoyer cette circulaire suite à un procès perdu contre une doctorante de Lyon. Cette personne réclamait des indemnités journalières égales à 100 % de son salaire net. Elle s'appuyait pour cela sur le fait que l'allocataire de recherche est lié par un Contrat à Durée Déterminée (CDD) avec l'état et est par conséquent un agent non titulaire de l'état bénéficiant des droits conférés par le décret numéro 86-83 sur les agents non titulaires de l'état.

Jusqu'à présent, les allocations MENESR étaient uniquement régies par le décret numéro 85-402. Pendant la durée du congé, le traitement était suspendu et remplacé par des indemnités journalières versées par la sécurité sociale, d'un montant inférieur au salaire. Le contrat était ensuite prolongé de manière exceptionnelle lorsqu'il arrivait à son terme, à condition d'en avoir fait la demande au minimum deux mois avant.

Afin de se mettre en conformité avec le jugement du tribunal administratif de Lyon, le MENESR (ou plus exactement les rectorats qui le représentent localement) ne doit plus suspendre le salaire de l'allocataire durant son congé maternité. Un système de récupération sur salaire des indemnités journalières versées par la sécurité sociale est mis en place par le rectorat dès qu'il est au courant du congé.

En fonction du coût de cette nouvelle application de la réglementation qui concerne non seulement les congés maternité mais aussi les congés maladie d'une durée supérieure à quatre mois, il est possible que le décret numéro 85-402 soit modifié afin de ne plus permettre la prolongation des contrats. Soit la thèse deviendrait un CDD banal, soit l'allocation serait transformée en bourse, ce qui aurait aussi pour conséquence la suppression de droits tels que les indemnités chômage.

Lors d'un congé de maternité ou d'adoption d'un-e allocataire ayant plus de six mois d'ancienneté, le salaire ne doit plus être suspendu (cf article 15 du décret numéro 86-83). La sécurité sociale indemnise l'allocataire suivant le régime général (100 % du salaire net de l'allocataire auquel on ajoute le montant de la RDS (Remboursement de la Dette Sociale)), et le rectorat récupère sur le salaire de l'allocataire les indemnités journalières versées par la sécurité sociale. Les comptes sont revus lorsque le contrat arrive à terme.

Lorsque l'agent a moins de six mois d'ancienneté, l'article 16 du décret numéro 86-

83 indique qu'il est placé en congé sans solde. A l'issu du congé, le cas de l'agent est traité identiquement au cas d'une personne ayant bénéficié des dispositions de l'article 15. Dans le cas des allocataires de recherche, il s'agit de la possibilité d'obtenir une prolongation exceptionnelle du contrat.

Enfin, on peut noter que dans le projet de loi de finances pour 1997, il est proposé de soumettre les indemnités maternité au régime fiscal des salaires.

Actuellement - cas des allocataires ayant démarré au plus tard en 1996 - les prolongations exceptionnelles suite à un congé maternité sont toujours autorisées en vertu du décret numéro 85-402 qui est la référence lors de la signature du contrat. Il faut pour cela faire la demande de prolongation, au plus tard deux mois avant le terme du contrat.

Le jugement du tribunal administratif de Lyon peut servir de prétexte à la remise en question du statut des allocataires. Ainsi, certaines personnes professent que l'allocataire doit choisir entre bénéficier des avantages sociaux des agents non titulaires de l'Etat et avoir la possibilité de prolonger le contrat. Dans le cas particulier de la maternité nous ne voyons pas de raison valable d'exiger cela, étant donné qu'il n'y a aucune dépense supplémentaire à la charge de l'état par rapport à l'ancienne situation.

De même, du fait de l'accroissement de la part du budget des allocataires affectée aux dépenses de chômage, certains responsables souhaitent transformer l'allocation en bourse d'étude niant par là même le travail effectué par les doctorants pour les laboratoires et l'état. En effet, un allocataire passerait alors du double statut de salarié et étudiant à celui unique d'étudiant, ce qui ne va pas dans le sens d'une valorisation du doctorat.

Supprimer la prolongation du contrat à la suite d'un congé maternité ressemble beaucoup à une mesure discriminatoire interdisant aux femmes d'avoir des enfants durant leur thèse. Mais ce n'est peut-être pas la pire conséquence de cette affaire car, non seulement le droit à la maternité, mais l'ensemble des droits sociaux des allocataires de recherche sont menacés par la transformation de l'allocation en bourse, alors que l'activité et la production des allocataires témoignent de la réalité du travail qu'ils réalisent.

Groupe action-hd (groupe créé suite de la rédaction du rapport HotDocs.)

contact : *Patricia Le Moënner*

IRISA Campus de Beaulieu 35042 Rennes cedex

Tel : 02 99 84 74 69

email : lemoenne@irisa.fr

## Statistiques de l'Enseignement Supérieur

*Démographie 1996*

Enseignants-chercheurs en sections 25 et 26.

Section 25	Effectifs	Femmes	% de femmes
PR0	84	2	2 %
PR1	241	26	11 %
PR2	260	22	8 %
Total PR	585	50	9 %
MC0	83	28	34 %
MC1	583	135	23 %
MC2	165	35	21 %
Total MC	831	198	24 %
Total 25	1416	248	18 %
Section 26	Effectifs	Femmes	% de femmes
PR0	56	3	5 %
PR1	194	14	7 %
PR2	255	46	18 %
Total PR	505	63	12 %
MC0	78	20	26 %
MC1	579	171	30 %
MC2	224 d	68	30 %
Total MC	881	259	29 %
Total 26	1386	322	23 %
TOTAL 25+26	2802	570	20 %

*Statistiques 91-96*  
Recrutements.

M de C	total	total	25	25	26	26	25/26	25/26
	total	femmes	total	femmes	total	femmes	total	femmes
1991	113	23						
1992	119	28	51	10	59	18	9	0
1993	145	39	61	16	84	23		
1994	151	26	58	7	64	18		
1995	106	21						
1996	100	26						
Pr	total	total	25	25	26	26	25/26	25/26
	total	femmes	total	femmes	total	femmes	total	femmes
1991	78	14						
1992	82	8	33	2	39	6	10	0
1993	88	13	42	4	46	9		
1994	56	4	15	0	19	4		
1995	53	5		0		4		
1996	41	0		0		0		

Pourcentages de femmes dans les recrutements

	M de C	Pr
1991	20,5%	18%
1992	23%	9,7%
1993	26,8%	14,5%
1994	17%	7%
1995	19%	9,4%
1996	26%	0%

Autres précisions :

en 1992, sur les 28 professeurs étrangers recrutés, il y a 0 femme,  
en 1993, sur les 25 professeurs étrangers recrutés, il y a 1 femme,  
en 1994, sur les 24 professeurs étrangers recrutés, il y a 0 femme,  
en 1995, sur les 16 professeurs étrangers recrutés, il y a 0 femme.

### Qualifications

M de C	candidats		qualifiés	
	% femmes	total	% femmes	total
25				
1992	18%	427	14%	210
1993	19%	220	18%	141
1994	18,5%	399	12,5%	189
26				
1992	18,75%	480	21%	281
1993	19%	348	18,5%	211
1994	16,5%	556	15,5%	254
Pr	candidats		qualifiés	
	% femmes	total	% femmes	total
25				
1992	11,5%	287	10%	163
1993	11%	137	12%	58
1994	10%	139	7%	65
26				
1992	15,6%	293	16,5%	212
1993	18%	114	15%	61
1994	11%	155	12%	93

Nous n'avons pas les données pour 1995. En 1996, c'est la nouvelle procédure. seuls sont examiné-e-s par le CNU les candidat-e-s retenus par une Université.

Candidatures en 1996 : pourcentage de femmes

	M de C	Pr
25	16%	8%
26	17%	11,4%

### Qualifications au CNU

	% femmes M de C	total M de C	% femmes Pr	total Pr
25	16,7%	137	0%	52
26	25%	125	7,5%	39

*Constatations évidentes*

- Il y a eu une progression globale du pourcentage des femmes entre 1991 et 93. Cette progression s'observe simultanément à l'augmentation du nombre total des postes mis au concours.
- Depuis il y a eu aggravation de la situation pour aboutir à la situation inacceptable où il n'y a aucune nomination de professeurs femmes en 25ème en 1995 et 1996 ni en 26ème en 1996.
- La proportion en 25ème est constamment plus mauvaise et de loin qu'en 26ème.
- La proportion au niveau du recrutement est plus mauvaise globalement qu'au niveau des qualifications.

La situation est donc assez claire mais les remèdes semblent plus difficiles à imaginer.

Sources : Pour les recrutements, rapports du Ministère de l'Éducation Nationale. Pour les listes de qualification, listes du CNU. Pour les candidatures en 1996, enquête de femmes et mathématiques auprès des présidents de commissions de spécialistes.

*Jacqueline Détraz*



## Références

- [1] *Alexandra Barriol*, Hypatie, la lionne de l'apocalypse, Paris, la Pensée universelle, 1987.
- [2] *Lilly Beerman, Kurt A.Heller, Pauline Menacher*, Mathe : nichts für Mädchen ? Verlag Hans Huber, Bern - Göttingen - Toronto - Seattle 1992.
- [3] *Paul J. Campbell and Louise S. Grinstein* (Eds.), Women of Mathematics, a biobibliographic sourcebook (43 biographies), Greenwood Press Inc., Westport, Connecticut 1987.
- [4] *Monique Carras, Brigitte Hemmerlin*, ça ne vous dérange pas que je sois une femme ? Éditions Hors Collection, 1996.
- [5] *M.L. Cartwright*, Grace Chisholm Young, J. London Math. Soc. 19 (1944) pp. 185-192.
- [6] *Phyllis Z. Chinn*, Women in Science and Mathematics, Bibliography, 1988, Humboldt State University Foundation, P.O. Box 1185, Arcata, California 95521-1185.
- [7] *Jacques Commaille*, Les stratégies des femmes : travail, famille et politique, Paris, La Découverte, 1993.
- [8] *Sylvia Curruca*, Als Frau im Bauch der Wissenschaft. Was an deutschen Universitäten gespielt wird, Herder Verlag, Freiburg im Breisgau 1993.
- [9] *André Deledicq*, Histoires de maths : K. F. Gauss, S. Ramanujan, Sophie Germain, E. Galois et un tableau chronologique de mathématiciens, Paris, Berger Levrault, Art-Culture-Lecture, 1992.
- [10] *Colette Dowling*, The Cinderella's complex, Women's Hidden Fear of Independence, 1981, Traduction Grasset 1982.
- [11] *M. Duru-Bellat et J.-P. Jarousse*, Le masculin et le féminin dans les modèles éducatifs parentaux, économie et Statistique, n° 293, 1996/3, pp. 77-93.
- [12] *C. Fontanini-Martin*, Vol au-dessus d'un nid de taupines, Paris VII, DEA Sexes et Sociétés, 1995, référence 18-152 dans le Bulletin du Centre de Documentation du service des droits des femmes.
- [13] *Annie Goldmann*, Les combats des femmes, Collection XX<sup>eme</sup> siècle, Avril 1996.

- [14] *Barbro Grevholm and Gila Hanna* (éds.), *Gender and Mathematics Education, an ICMI Study*, Sweden 1993, Lund University Press 1995.
- [15] *Gila Hanna* (éd.), *Towards Gender Equity in Mathematics Education, an ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers 1996.
- [16] *Patricia Clark Kenschaft et Sandra Zaroodny Keith* (éds.), *Winning women into mathematics*, Mathematical Association of America, 1991.
- [17] *Israël Kleiner*, *Emmy Noether : highlights of her life and work*, *Enseign.-Math.* (2) 38 (1992) no. 1-2, 103-104.
- [18] *Ann Hibner Koblitz*, *A Convergence of Lives. Sophia Kovalevskaja : Scientist, Writer, Revolutionary*, Birkhauser, Boston - Basel - Stuttgart 1983. Taschenbuchausgabe Rutgers University Press 1994.
- [19] *Michèle Le Doeuff*, *L'étude et le rouet, Tome 1 : des femmes, de la philosophie, etc...* , Éditions du Seuil, 1989.
- [20] *Claude Lelièvre, Françoise Lelièvre*, *Histoire de la scolarisation des filles*, collection "Les Repères Pédagogiques", Éditions Nathan, Sciences de l'éducation, 1991.
- [21] *Noëlle Lorient*, *Irène Joliot-Curie : un destin au service de la science*, Presses de la Renaissance, 1992.
- [22] *Deborah Nolan*, *Women in Statistics*, *Statistical Science*, vol. 7, numéro 2, mai 1992.
- [23] *Juliette Nourreddine* (auteur, compositeur, interprète), *Rimes Féminines*, un disque compact SONY, 1996.
- [24] *Rosalynn Pflaum*, *Marie Curie et sa fille Irène, deux femmes, trois Prix Nobel* (traduit de l'américain par Francine de Martinoir), Paris, Pierre Belfond, 1992.
- [25] *Susan Quinn*, *Marie Curie, a Life*, Simon and Schuster, New York 1995. Traduction française par Laurent Muhleisen aux Éditions Odile Jacob, 1996.
- [26] *Albert Samuel*, *Les Femmes et les Religions*, Éditions de l'Atelier, Paris 1995.
- [27] *Jane Swigart*, *The Myth of the Bad Mother*, Doubleday, New York, 1990. Version française : *Le mythe de la mauvaise mère*, Éditions Robert Laffont, Paris 1992.
- [28] *Laura Tedeschini Lalli*, *Fatti, numeri e femine*, *Sapere*, dic. 1992.

- [29] *Giovanna Tilche*, Maria Gaetana Agnesi, La Scenziata Santa del Settecento, Rizzoli Editore, Milano, 1984.
- [30] *Betty Toole*, Ada, the Enchantress of Numbers (correspondance entre Ada Byron et Charles Babbage) Strawberry Press, Mill Valley, CA (1992).
- [31] *Emily Toth, Bruce Toth*, Mary Who? A biography of Mary Sommerville, Johns Hopkins Magazine, janvier 1978, pp. 25- -29.
- [32] *Robert Viala*, L'enseignement secondaire des jeunes filles (1880-1940), par ceux qui l'ont créé et celles qui l'ont fait vivre, Les dossiers de Sèvres, 1987.
- [33] Klaglos im Keller (à propos de Lise Meitner), Der Spiegel, 21 (1996).
- [34] Profiles of Women in Mathematics, The Emmy Noether Lectures, AWM 1994 (recueil de 14 biographies d'une page de mathématiciennes contemporaines).

compilée par *Raphaële Supper*





## Numéro 2

- **Editorial** **1**
  
- **Vie de l'association**
  - Table ronde Femmes et Mathématiques, juillet 1996, Budapest  
*Kari Hag, Sylvie Paycha* **3**
  - Journées de l'APMEP, Albi  
*Annick Boisseau, Gwenola Madec* **7**
  - Renormalisation en mathématique et en physique.  
*Sylvie Paycha* **9**
  - Anneau noethérien.  
*Laura Fainsilber* **10**
  
- **A propos de mathématiques**
  - Apprendre et enseigner une mathématique dynamique.  
*Annie Berté* **13**
  - Asymptotiques dans les plaques minces.  
*Monique Dauge* **29**
  - Formes quadratiques et isomorphisme.  
*Laura Fainsilber* **39**
  - Théorie de Galois constructive.  
*Annick Valibouze* **45**
  
- **A propos de femmes**
  - A la mémoire de Sandrine Koraty  
*Colette Guillopé, Marie-Françoise Roy, Micheline Vigué* **59**
  - Observatoire de l'imparité :  
Menaces sur le droit à la maternité des allocataires de recherche  
*Groupe action-hd* **49**
  
  - Statistiques sur les recrutements dans l'enseignement supérieur  
*Jacqueline Détraz* **65**
  - Bibliographie  
*Raphaële Supper* **69**