Algèbres duales et classes $\mathbb{A}_{n,m}$

Isabelle Chalendar

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et soit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$. La question de savoir si pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, il existe un sous-espaoe (fermé) $\mathcal{M}$ non trivial de $\mathcal{H}$ invariant pour T ($i.e.(0) \neq \mathcal{M} \neq \mathcal{H}$ et $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$) est connue sous le nom de *problème du sous-espace invariant* et est toujours ouverte. Rappelons que pour le problème analogue sur un espace de Banach il existe des exemples dus à Enflo [7], Beauzamy [9], et Read [9], d'opérateurs dépourvus de sous-espaces invariants non triviaux (s.e.i.n.t).

En 1978, Scott Brown démontrait que tout opérateur sous-normal (c'est-à-dire un opérateur admettant une extension normale) possède un s.e.i.n.t. Ce résultat, dans un domaine qui était l'objet d'actives recherches depuis le début des années 50 et le lieu d'interférence de la théorie des fonctions et de la théorie géométrique des opérateurs, était certes très important en lui-même. Il devait se révéler l'être encore beaucoup plus par la méthode introduite qui fut presque immédiatement étendue à d'autres classes d'opérateurs.

Le point de départ de S.Brown réside dans la remarque suivante : si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et s'il existe x et y vecteurs de $\mathcal{H}$ vérifiant $(p(T)x, y) = p(0)$ pour tout polynôme p, alors T a un s.e.i.n.t.

L'outil principal introduit par S.Brown pour mettre en oeuvre la remarque précédente est le concept *d'algèbre duale* sur un espace de Hilbert. Il est bien connu qu'en tant qu'espace de Banach, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est le dual de l'espace de Banach (et idéal de $\mathcal{L}(\mathcal{H}))C^1(\mathcal{H})$ des opérateurs à trace finie. Plus précisément $C^1(\mathcal{H})$ est défini par $\mathrm{C}^1(\mathcal{H}) = \{L = \Sigma_{n\geq 1} x_n \otimes y_n,\ (x_n)_n,\ (y_n)_n \in l^2(\mathcal{H})\}$ où $x \otimes y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, avec $x \otimes y(u) = (u, y)x$. Cette dualité est régie par la forme trace : $< L, T >= trace(LT)$ où $L \in C^1(\mathcal{H})$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($trace(L) = \sum_{n\geq 1}(x_n, y_n)$ si $L = \sum_{n\geq 1} x_n \otimes y_n$). La dualité $\mathcal{L}(H) = (C^1(\mathcal{H}))^*$ permet de doter $\mathcal{L}(H)$ d'une topologie faible* (w*) , également appelée topologie ultrafaible. Cette topologie peut @e définir grâce à la famille de semi-normes

$$(p_L)_{L\in C^1(\mathcal{H})} \text{ où } p_L(T) = |trace(LT)|.$$

Définition 1 *On appelle algèbre duale sur $\mathcal{H}$ toute sous-algèbre unitaire $\mathcal{A}$ ultrafaiblement fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

La terminologie *algèbre duale* se justifie par le fait que $A = (Q_A)^*$ avec $QA = C^1(H)/\perp A$ où$^\perp A = \{L \in C^1(H); \forall T \in A,\ < T,\ L >= 0\}$. Tout élément $[L]$ de QA peut s'écrire $[L] = \Sigma_{i\geq 1}[x_i \otimes y_i]$ où $(x_i)_i, (y_i)_i \in t^2('H)$. En adaptant la remarque précédente on montre que s'il existe φ un caractère faible$*$ continu sur A tel que $\varphi = [x \otimes y]$, alors 1'algèbre duale A a un s.e.i.n.t. Ceci donna 1'idée naturelle d'introduire la propriété (A_1) :

$$\forall [L] \in \mathcal{Q}_{\mathcal{A}},\ \exists (x, y) \in \mathcal{H}^2;\ [L] = [x \otimes y].$$

A présent, considérons le cas où $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, contraction absolument continue, a un calcul fonctionnel de Nagy-Foias, Φ_T, isométrique (cf. [10]). Soit $\mathcal{A}_T$ l'algèbre duale engendrée par T (i.e $\mathcal{A}_T$ est la fermeture pour la topologie faible* de l'algèbre des polynômes en T) et soit φ_T le faible* homéomorphisme défini de $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}_T}$ dans le prédual de H^∞ (cf. théorème 4.1 de [3]). On note $\varphi_T([x \otimes y]) = x \overset{T}{\square} y$ et on désigne par $\mathbb{A}$ la classe des contractions absolument continues ayant un calcul fonctionnel de Nagy-Foias isométrique. On définit alors les classes $\mathbb{A}_{n,m}(1 \leq n, m \leq \aleph_0)$ de la façon suivante :

Definition 2 *La classe* $\mathbb{A}_{n,m}(1 \leq n, m \leq \aleph_0)$ *est l'ensemble des contractions* $T \in \mathbb{A}$ *telles que pour toute famille* $\{f_{i,j},\ 0 \leq i < n,\ 0 \leq j < m\}$, *il existe deux familles de vecteurs de* $\mathcal{H}, \{x_i,\ 0 \leq i < n\}$ *et* $\{y_j,\ 0 \leq j < m\}$ *satisfaisant* $[f_{i,j}] = x_i \overset{T}{\square} y_j$.

L'appartenance à ces classes permet de préciser l'existence et la richesse des s.e.i.n.t. Cependant il est en géneral difficile de vérifier l'appartenance à ces ensembles. Suite aux travaux présentés dans [4], [6] et [8], nous nous sommes intéressés à une caractérisation différente des classes $\mathbb{A}_{n,m}$.

Les résultats présentés dans ce qui suit ont été obtenus en collaboration avec Frédéric Jaeck, étudiant en thèse de B. Chevreau à Bordeaux I. Nous avons obtenu des conditions suffisantes d'appartenance aux classes $\mathbb{A}_{n,m}$. Avant d'énoncer nos résultats, nous rappelons la notion de multiplicité d'un opérateur unitaire absolument continu ainsi que la définition d'un *ensemble frontière* qui joue un rôle essentiel.

Définition 3 *Soit* $R \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ *un opérateur unitaire absolument continu et soit* σ *un borélien de* T (*le tore*). *On dit que* R *est de multiplicité supérieure ou égale à* n *sur* σ *et on note mult* $(R) \geq n$ *sur* σ_f *s'it existe* $\mathcal{R}_0$, *un sous-espace réduisant pour* R *tel que* $R_{|\mathcal{R}_0}$ *soit unitairement équivalent à* $\underbrace{M_\sigma \oplus \cdots \oplus M_\sigma}_{n}$ *sur* $\underbrace{L^2(\sigma) \oplus \cdots \oplus L^2(\sigma)}_{n}$ *où* M_σ *est défini par :* $(M_\sigma x)(e^{it}) = e^{it}x(e^{it})$, $x \in L^2(\sigma)n, e^{it} \in \sigma$.

Definition 4 *On appelle* X_T *le borélien maximd* (*pour l'inclusion*) *du tore pour la propriété* (*P*) *définie comme suit : un borélien* σ *a la propn·été* (*P*) *si* $\forall f \in L^1(\sigma)$, $||f||_1 \leq 1$, *il existe deux suites* $(x_n)_n, (y_n)_n$ *dans la boule unité de* $\mathcal{H}$ *telles que :*

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} ||\ [f] - x_n \overset{T}{\square} y_n|| = 0 & \\ \lim_{n\to\infty} ||\ x_n \overset{T}{\square} w|| = 0 & \forall w \in \mathcal{H} \\ \lim_{n\to\infty} ||\ w \overset{T}{\square} y_n|| = 0 & \forall w \in \mathcal{H} \end{cases}$$

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une contraction absolument continue. On désigne par $U+$ (resp. B) sa dilatation isométrique minimale (d.i.m) (resp. son extension coisométrique minimale (e.c.i.m)) ($cf.$[10]) . D'aprés le théorème de décomposition de Wold, $U_+ = S_* \oplus R, B = S^* \oplus R_*$ où R et R_* sont des opérateurs unitaires absolument continus dont les supports des mesures spectrales associés seront notés Σ_T et Σ_{*T} respectivement.

Nous rappelons enfin la décomposition canonique de Nagy-Foias d'une contraction $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (cf. p73 dans [10]), à savoir : $T = \begin{pmatrix} T_0 & * \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ relativement à la décomposition orthogonale $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ où $\mathcal{H}_0$ est défini par $\mathcal{H}_0 = \{x \in \mathcal{H};\ \lim_{n\to\infty} ||T^n x|| = 0\}$. On notera $R^{\mathcal{H}_0}$ la partie unitaire de la d.i.m de T_0 et $R_*^{\mathcal{H}_1}$ la partie unitaire de l'e.c.i.m de T_1.

Théorème 1 *Soit* $T \in \mathbb{A}$ *et soit un entier* n *tel que* $1 \leq n \leq \aleph_0$. *Si mult* $(R^{\mathcal{H}_0}) \geq n$ *sur* $\mathbb{T}\backslash(X_T \cup \Sigma_{*T})$, *alors* $T \in \mathbb{A}_{1,n}$.

Théorème 2 *Soit* $T \in \mathbb{A}$ *et soit un entier* k *tel que* $1 \leq k \leq \aleph_0$. *Si mult* $(R_*^{\mathcal{H}_1}) \geq k$ *sur* $\mathbb{T}\backslash(X_{T_0} \cup \Sigma_{T_0})$, *alors* $T \in \mathbb{A}_{k,1}$.

Théorème 3 *Soit* $T \in \mathbb{A}$ *et soient* k, n *des entiers tels que* $1 \leq k, n \leq \aleph_0$. *Si l'on a mult* $(R^{\mathcal{H}_0}) \geq n$ *sur* $\sigma_0 \subset \Sigma_{T_0}\backslash X_T$ *et mult* $(R_*^{\mathcal{H}_1}) \geq k$ *sur* $\sigma_1 \subset \Sigma_{*T_1}\backslash X_T$ *avec* $\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup X_T = \mathbb{T}$, *alors* $T \in \mathbb{A}_{k,n}$.

Remarque : Nous obtenons en particulier les deux implications suivantes :
- si *mult* $(R^{\mathcal{H}0}) \geq n$ sur $\mathbb{T}\backslash(X_T \cup \Sigma_{*T})$ et si *mult* $(R_*^{\mathcal{H}_1}) \geq k$ sur $\Sigma_{*1}\backslash X_T$, alors $T \in \mathbb{A}_{k,n}$.
- si $mult(R^{\mathcal{H}_0}) \geq n$ sur $X_{T_0} \cup \Sigma_{T_0}\backslash X_T$ et si *mult* $(R_*^{\mathcal{H}_1}) \geq k$ sur $\mathbb{T}\backslash(X_T \cup \Sigma_{T_0})$, alors $T \in \mathbb{A}_{k,\iota}$.

Bibliographie

[1] *B. Beauzamy.* Un opérateur sans sous-espace invariant : simplification de l'exemple de P. Enflo. Acta-Math., 144 :65-82, 1980.

[2] *H. Bercovici.* Factorization theorems and the structure of operators on Hilbert space. Ann. of Math., 128 :399-413, 1988.

[3] *H. Bercovici, C. Foias, and C. Pearcy.* Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory. In CBMS Regional conference series in mathematics, number 56. A.M.S., Providence, 1985.

[4] *B. Chevreau, G. Exner, and C. Pearcy.* Boundary sets for a contraction. J. Operator Theory, 34 :347-380, 1995.

[5] *B. Chevreau.* Survey of the class *Ambb*. preprint.

[6] *G.R. Exnerf Young Soo Jo, Il Bong Jung.* C_0 contractions : Dual operators algebra, Jordan models and multiplicity. to appear.

[7] *P. Enflo.* On the invariant subspace problem in Banach spaces. Acta-Math.

[8] *M. Ouannasser.* Sur les contractions dans la classe $Ambb_n$. J. Operator Theory, 28 :105-120, 1992.

[9] *C. Read.* A solution to the invariant subspace problem. Bulletin London Mathematical Society, 16 :337-401, 1984.

[10] *B. Sz-Nagy and C. Foias.* Harmonic analysis of operators on Hilbert space. North Holland, Amsterdam, 1970.

U.F.R. Mathématiques et Informatique
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex
chalenda@math.u-bordeaux.fr