Interpolation complexe d'un espace de Banach et de son antidual.

Frédénque Watbled

On sait depuis longtemps que si X est un espace de Banach complexe de dimension finie n, alors $(X, \overline{X^\star})_{\frac{1}{2}}$ est isométrique à l'espace de Hilbert l_2^n. On sait aussi que $(L^p,\ L^q)_{\frac{1}{2}}$ est isométrique à L^2 pour tout p compris entre 1 et l'infini et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Cf par exemple [2]). On est donc naturellement amenés à se demander si l'interpolé $(X, \overline{X^\star})_{\frac{1}{2}}$ est toujours isométrique à un espace de Hilbert pour un Banach complexe quelconque X, où $\overline{X^\star}$ désigne l'antidual de X, c'est-à-dire l'espace vectoriel X^* où l'on remplace la multiplication par un scalaire habituelle $\lambda x, \lambda \in \mathbb{C}, x \in X$, par la multiplication conjuguée $\lambda \odot x = \overline{\lambda} x$. Pour pouvoir parler de l'espace interpolé $(X, \overline{X^\star})_{\frac{1}{2}}$ il faut d'abord que le couple $(X, \overline{X*}$ soit compatible, c'est-à-dire que X et $\overline{X^*}$ s'injectent tous deux dans un même espace vectoriel topologique U, de manière à pouvoir former leur intersection et leur somme. Rappelons la définition des espaces d'interpolation complexe, due à Calderón (Cf [2] ou [3]) : si $(A_0,\ A_1)$ forme un couple d'espaces de Banach compatible on définit les normes suivantes sur l'intersection et la somme :

$$\|a\|_{A_0\cap A_1} = \max\left(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\right)$$
$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf\left(\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}, a = a_0 + a_1, a_j \in A_j, j = 0, 1\right),$$

qui en font des espaces de Banach. On appelle $\mathcal{F}(A_0,\ A_1)$ la famille des fonctions f bornées continues sur la bande $\overline{S} = \{z\ \in \mathbb{C},\ 0 \leq \Re z \leq 1\}$, à valeurs dans $A_0 + A_1$, holomorphes sur l'intérieur $S = \{z\ \in\ \mathbb{C},\ 0\ <\ \Re z\ <\ 1\}$, vérifiant $f(j + it) \in A_j$ pour $j = 0,\ 1$ et $||f(j + it)||_{A_j}$ tend vers zéro lorsque $|t|$ tend vers l'infini, $j = 0,\ 1$. L'espace $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{F}} = \max_{j=0,1} \sup\nolimits_{t\in\mathbb{R}} \|f(j + it)\|_{A_j}$$

est un espace de Banach, et on définit, pour $\theta \in [0, 1]$, l'espace d'interpolation complexe

$$(A_0, A_1)_\theta = \{f(\theta), f \in \mathcal{F}\left(A_0, A_1\right)\},$$

qu'on munit de la norme $||a||_{[\theta]} = \inf\{||f||_{\mathcal{F}},\ f \in \mathcal{F},\ f(\theta) = a\}$, qui n'est autre que la norme du quotient de $\mathcal{F}(A_0,\ A_1)$ par le sous-espace des fonctions qui s'annulent au point θ. Les espaces $(A_0,\ A_1)e$ sont intermédiaires entre $A_0 \cap A_1$ et $A_0 + A_1$ et on montre que l'intersection $A_0 \cap A_1$ est dense dans $(A_0,\ A_1)_\theta$ pour tout $\theta \in [0, 1]$

Calderón définit une deuxième méthode d'interpolation complexe en considérant cette fois la famille $\mathcal{G}(A_0,\ A_1)$ des fonctions g continues sur $\overline{S}$ à valeurs dans $A_0 + A_1$, holomorphes sur S, vérifiant $||g(z)\|_{A_0+A_1} \leq c(1 + |z|)$, et $g(j + it_1) - g(j + it_2) \in A_j$

pour $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ et $j = 0, 1$, avec

$$\|g\|_{\mathcal{G}} = \max_{j=0,1} \sup_{t_1,t_2\in\mathbb{R}} \|\frac{g\,(j+it_1) - g\,(j+it_2)}{t_1 - t_2}\|_{A_j} < \infty$$

L'espace $\mathcal{G}(A_0,\ A_1)$ modulo les fonctions constantes et muni de la norme $\|\|\cdot_{\mathcal{G}}$ est un espace de Banach, et on pose

$$(A_0, A_1)^{\theta} = \{g'(\theta), g \in \mathcal{G}\}\,,$$

qu'on munit de la norme $\|a\|^{[\theta]} = \inf\{\|g\|_{\mathcal{G}}, g \in \mathcal{G}, g'(\theta) = a\}$. Calderón a montré que l'espace $(A_0,\ A_1)_\theta$ s'injecte dans l'espace $(A_0, A_1)^{\theta}$ mais c'est à Bergh ([1]) que l'on doit de savoir que cette injection est isométrique.

Nous considérons ici deux cadres possibles dans lequel interpoler X et son anti-dual : dans le premier on suppose qu'il existe un espace de Hilbert H et une injection v d'image dense de H dans X. L'application adjointe $v^\star$ est alors une injection de $\overline{X^\star}$ dans $\overline{H}^* = H$, ce qui permet d'identifier $\overline{X^\star}$ au sous-espace $vv^\star(\overline{X^\star})$ de X. L'intersection $X \cap \overline{X*}$ est alors égale à $\overline{X^\star}$ tandis que la somme $X + \overline{X*}$ est égale à X. Cette situation a déjà été essentiellement considérée par Haagerup et Pisier ([4]) en ce qui concerne les espaces de Banach, et par Pisier ([5]) pour les espaces d'opérateurs, où l'espace de Hilbert H est remplacé par l'espace d'opérateurs OH. Un exemple typique est fourni par $X = L^1[0,\ 1], H = L^2[0,\ 1])$ et $v = Id$. Le théorème est le suivant :

Théorème 1 *Soit H un espace de Hilbert, soit $v : H \to X$ une injection d'image dense. Alors $\overline{X^\star} \overset{v^\star}{\to} \overline{H^\star} = H \overset{v}{\to} X$ fournit un cadre pour interpoler X et $\overline{X^\star}$, et dans ce cadre $(X, \overline{X^\star})_{\frac{1}{2}} = H$ avec égalité des normes.*

Dans le deuxième cadre on suppose qu'il existe un espace de Hilbert H et une injection d'image dense v de X dans H. Remarquons qu'il suffit en réalité de connaître une injection de X dans H car en restreignant l'espace d'arrivée on obtient une injection d'image dense. L'application $v^\star v$ permet alors d'identifier X au sous-espace $v^\star v(X)$ de $\overline{X^\star}$. Dans ce cas l'intersection de X et $\overline{X*}$ est égale à X tandis que la somme est égale à $\overline{X^\star}$. Un exemple typique de cette situation est fourni par $X = C[0,1], H = L^2[0,1]$ et $v = Id$. Pour conclure à l'isométrie de $(X, \overline{X^\star})_{\frac{1}{2}}$ avec H dans ce cadre on a besoin du fait, intéressant en lui-même, que $(A_0^\star,\ A_1^\star)_\theta$ est séquentiellement préfaiblement dense dans $(A_0^\star,\ A_1^\star)^\theta$, ce qui entraîne en particulier l'égalité de ces deux espaces dès que l'un des deux est réflexif. On obtient le théorème suivant :

Théorème 2 *Soit H un espace de Hilbert, soit $v : X \to H$ une injection d'image dense. Alors $X \overset{v}{\to} H = \overline{H\star} \overset{v^\star}{\longrightarrow} \overline{X^\star}$ fournit un cadre pour interpoler X et $\overline{X*}$, et dans ce cadre $(X, \overline{X^\star})_{\frac{1}{2}} = H$ avec égalité des normes.*

Bibliographie

[1] *J. Bergh* On the relation between the two complex methods of interpolation. Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), 775-778.

[2] *J. Bergh el J. Löfström* Interpolation Spaces. An introduction. Grundlehren 223 Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976.

[3] *A. P. Calderón* Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Studia Math. 24 (1964), 133-190.

[4] *U. Haagerup et G. Pisier* Factorization of analytic functions with values in noncommutative L^1-spaces and applications. Canadian J. Math. 41 (1989) 882-906.

[5] *G. Pisier* The Operator Hilbert Space *OH*, Complex Interpolation and Tensor Norms. preprint.

Equipe d'analyse et mathématiques appliquées
Université de Marne-la-Vallée
2, rue de la Butte-Verte, 93166 Noisy-le-Grand cedex
watbled@math.univ-mlv.fr