Sur la resommation de certaines séries divergentes.

Mathilde Toulouse

Etant donnée une équation différentielle linéaire homogène $y'' + hy^t + ty = 0$ de degré deux, où h et $t \in \mathbb{C}(x)$, il n'existe pas toujours des solutions s'exprimant à l'aide des fonctions classiques et de leurs primitives. Par contre, on peut trouver des solutions formelles. Nous allons voir que ces solutions formelles permettent de calculer, localement, de vraies solutions.

Nous allons étudier 1'équation (D) : $z'' = az$. On peut toujours s'y ramener en posant $z = ye^{\int \frac{l}{2h}}$. Les singularités de (D) sont les pôles de a et éventuellement le point à l'infini. Supposons que l'origine 0 soit un point singulier de (D) . Au voisinage de 0, la fonction a admet un développement de Laurent : $a(x) = \sum_{n \geq n_0} a_n x^n, a_0 \neq 0$. On sait associer à l'équation (D) , un *polygone de Newton* au voisinage de 0, donné ici par la figure 1. Ce polygone admet une pente non nulle qui vaut $(n_0 - 2)/2$, si et seulement si $n_0 < 2$. Dans ce cas, la singuIarite en 0 est dite irrégulière. Dans le cas contraire, elle est régulière. On note k la plus grande pente finie du polygone de Newton de (D).

L'équation (D) admet deux solutions formelles, linéairement indépendantes,

$$\hat{u}_i\,(x^\nu)\,x^{\alpha_i}(\log x)^{p_i}e^{q_i(x^\nu)},\ \ i = 1, 2$$

avec $p_i, 1/\int \nu \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{C}, q_i \in \mathbb{C}[x]$ et $\hat{u}_i \in \mathbb{C}[[x]]$. Si la singularité est régulière, alors $q_1 = q_2 = 0$ et les séries formelles $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$sont convergentes dans un disque centré à l'origine. Si la singularitést irrégulière, les séries formelles $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$ sont, en général, divergentes.

Que peut-on espérer ?

On voudrait, par un processus de resommation, *incarner* , dans des régions à préciser, les séries formelles $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$ par de vraies solutions u_1 et u_2 de façon à ce que

- la série formelle $\hat{u}_i$ soit le développement asymptotique de u_i,
- la fonction $u_i(x^\nu)x^{\alpha\prime}(logx)^{pi}e^{q_i(x^\nu)}$ soit solution de l'équation (D).

Si la série $\hat{u}_i$ est divergente, elle ne peut pas être le développement asymptotique d'une fonction holomorphe dans un disque épointé centré en 0. Il faut dans ce cas polariser le problème dans une direction d et remplacer les disques épointés par des secteurs ouverts bissectés par d.

Développement asymptotique et k-sommation

Soit u une fonction holomorphe sur un secteur V de $\mathbb{C}^*$. On dit que u est *asymptote sur* V*, au sens Gevrey* k, à une série $\hat{u} = \sum a_n x^n$ si pour tout sous-secteur fermé W de V, il existe deux constantes positives C_W et A_W telles que

$$\forall N \in \mathbb{N}, |u(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n| \leq C_W A_W^N (N!)^{1/k} |x|^{N+1}$$

Soit u une fonction holomorphe asymptote à 0, au sens Gevrey k, sur un secteur V. On sait alors qu'il existe des constantes positives A et C telles que

$$|u(x)| \leq Ce^{-A|x|^{-k}} \quad \text{sur V.}$$

Si le secteur V est d'ouverture strictement supérieure à $\frac{\pi}{k}$ ce type de croissance implique que $u = 0$. Cette remarque permet de dire que s'il existe une fonction holomorphe u asymptote, au sens Gevrey k, à une série formelle $\hat{u}$ sur un secteur d'ouverture strictement supérieure à $\frac{\pi}{k}$ alors elle est unique.

On dit qu'une série formelle $\hat{u}$ est *k-sommable dans une direction d* s'il existe une fonction holomorphe u, asymptote à $\hat{u}$, au sens Gevrey k, dans un secteur bissecté par d et d'ouverture strictement supérieure à $\frac{\pi}{k}$.

Cas des series formelles solutions d'équations différentielles linéaires homogèmes d'ordre 2

On a [2] le théorème suivant.

Théorème 1 *Les séries $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$ sont k-sommables dans toute direction de $\mathbb{C}^*$ sauf éventuellement dans les directions de décroissance maximale de $e^{q_1-q_2}$ et $e^{q_2-q_1}$*

Les directions de décroissance maximale de e^{q1-q_2} et $e^{q_2-q_1}$ sont appelées *directions singulières* de l'équation. Elles sont, modulo 2π, en nombre fini.

Regardons par exemple l'équation $x^3y'' = y$. Son polygone de Newton (cf. figure) a une pente non nulle qui vaut $\frac{1}{2}$. Cette équation admet une base de solutions formelles :

$$\hat{u}_1(\sqrt{x})x^{\frac{3}{2}}e^{\frac{2}{\sqrt{x}}} \text{ et } \hat{\mathrm{u}}_2(\sqrt{\mathrm{x}})\mathrm{x}^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}$$

Sur $[0, 2\pi[$ la seule direction singulière est 0. Dans toutes les autres directions, les séries $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$ sont $\frac{1}{2}$-sommables.

Pour les équations d'ordre superieur, on a un résultat similaire mais qui fait intervenir de la multisommation, c'est à dire de la sommation avec plusieurs niveaux k distincts.

k-sommation par la méthode de Borel-Laplace

Soit d une direction de $\mathbb{C}^*$ et $\hat{u} = \sum a_n x^n$ une série formelle k-sommable dans la direction d. On sait qu'il existe alors des constantes A et C telles que $|a_n| \leq CA^n(n!)^{1/k}$. La série

$$\hat{B}(x) = \sum \frac{a_n}{(n!)^{1/k}} x^n$$

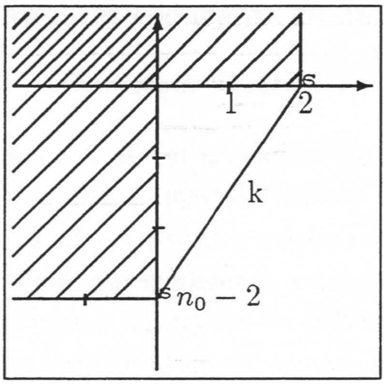

Figure 1 : Polygone de Newton en 0 de l'équation (enveloppe convexe des cadrans hachurés).

appelée *transformée de Borel formelle* de $\hat{u}$ est convergente. On note Φ_d le prolongement analytique de sa somme dans la direction d. *L'intégrale de Laplace* :

$$u(x) = k \int_d \Phi_d(\xi) e^{-\left(\frac{\xi}{x}\right)^k} d\xi \ ,$$

définit une fonction holomorphe asymptote à $\hat{u}$ dans un secteur $]d-\theta, d+\theta[$ avec $2\theta > \frac{\pi}{k}$. C'est la somme de $\hat{u}$ dans la direction d.

Bibliographie

[1] *M. Loday-Richaud* Introduction à la multisommabilité Gazette des Mathématiciens, S.M.F. (1990)

[2] *J.-P. Ramis and Y. Sibuya* Hukuhara domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type. Asymptotics, 2 :39-94 (1989).

Institut de Recherche en Mathématiques Avancées (URA CNRS 01)
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
toulouse@cartan.u-strasbg.fr