Autour des fonctions harmoniques de type exponentiel, quelques théorèmes d'unicité.

Raphaële Supper

Pour être identiquement nulle dans $\mathbb{R}^2$, il suffit à une fonction harmonique $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de type exponentiel (i.e. possédant dans $\mathbb{R}^2$ une croissance de la forme $|u(x,\ y)| \leq Ce^{b|x+iy1}$ avec C et b des constantes > 0) de s'annuler sur $\mathbb{Z} \times \{0\}$ et $\mathbb{Z} \times \{a\}$ où $a \in \mathbb{N}, 0 < a < \pi/b$ (voir [5]). Ce théorème d'unicité a été généralisé, indépendamment en [8] et [10], aux fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^N (N \in \mathbb{N},\ N \geq 2)$ de type exponentiel $< \pi$ s'annulant cette fois sur $\mathbb{Z}^{N-1} \times \{0\}$ et $\mathbb{Z}^{N-1} \times \{a\}$.

On propose ici une extension de ce résultat aux fonctions de l'espace $\mathcal{H}_{P,b,N}$ décrit dans la définition ci-dessous, en renvoyant à [4] pour davantage de détails. L'idée générale consiste à utiliser le fait qu'un élement $u \in \mathcal{H}_{P,b,N}$ est certes une fonction analytique dans $\mathbb{R}^N$ mais qu'elle est de plus *harmonique d'ordre infini*, ce qui permet d'assurer que u est restriction à $\mathbb{R}^N$ d'une fonction $\tilde{u}$ analytique dans $\mathbb{C}^N$, avec le même type de croissance pour $\tilde{u}$ dans $\mathbb{C}^N$ que pour u dans $\mathbb{R}^N$, l'intérêt des fonctions entières de type exponentiel résidant dans leur correspondance, via la transformation de Fourier-Borel, avec les fonctionnelles analytiques (cf [6], [7]), un outil très pratique pour étudier ces questions d'unicité (cf [9]).

Definition 1 *Étant donnés $b \geq 0$ et $P(X) = \sum_{0 \leq k \leq d} c_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré d dont l'ensemble des zéros $\mathcal{Z}p$ dans $\mathbb{C}$ ne rencontre pas $]-\infty, 0[$, soit $\mathcal{H}_{P,b,N}$ l'espace des solutions $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de l'equation*

$$P\left(\Delta_N\right) u = 0 \tag{1}$$

(avec $P(\Delta_N) = \sum_{0 \leq k < d} c_k \Delta_N^k$ où Δ_N^k deśigne l'opérateur laplacien dans $\mathbb{R}^{N_1}$ itéré k fois) pour lesquelles il existe $C_0 > 0$ et $C_d > 0$ telles que

$$|u(x)| \leq C_0 \exp\left(b\|x\|_N\right) \qquad \text{et} \qquad \left|\Delta_N^d u(x)\right| \leq C_d \exp\left(b\|x\|_N\right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Il existe des polynômes exponentiels $P_0, P_1, \ldots, P_{d-1}$, ne dépendant que de P, notés dans la suite $P_k(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{Z}_P} \sum_{0 \leq q < d_\alpha} c_{k,\alpha,q} \alpha omega^q$ (avec $c_{k,\alpha,q} \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \ldots, d-1$ et d_α la multiplicité de α comme zéro de P) tels que :

$$\Delta_N^m = P_0(m) Id + P_1(m) \Delta_N + \ldots + P_{d-1}(m) \Delta_N^{d-1}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, d'où (voir [1] pour une définition de l'harmonicité d'ordre infini) :

Théorème 1 *Toute solution u de (1) est une fonction harmonique d'ordre infini dans $\mathbb{R}^N$. Plus précisément, elle est la restriction à $\mathbb{R}^N$ de la fonction H, harmonique dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, définie par : $H(x,t) = \sum_{m \in \mathbb{N}} (-1)^m \dfrac{t^{2m}}{(2m)!} (\Delta_N^m u)(x)$.*

Noter que $H(x,t) = \Sigma_{\alpha\in\mathcal{Z}_P}\Sigma_{0\leq q<d_Q}C_{\alpha,q}(x)S_{\alpha,q}(t\rangle$, où $C_{\alpha,q}(x) = \Sigma_{k=0}^{d-1}c_{k,\alpha,q}(\Delta_N^k u)(x)$ et $S_{\alpha,q}(t) = \Sigma_{m\in\mathrm{N}}(-1)^m\alpha^m m^q\frac{t^{2m}}{(2m)!} = P_{\alpha,q}(t)e^{i\sqrt{\alpha}f} + Q_{\alpha,q}(t)e^{-\tilde{l}\sqrt{\alpha}*}$, avec $P_{\alpha,q}$ et $Q_{\alpha,q}\in$ $\mathrm{C}[X]$ des polynômes de degré $\leq q$.

Par ailleurs, on démontre (en utilisant le développement de Pizzetti [1] de la moyenne superficielle de u sur une sphère) que $\triangle_N u, \Delta_N^2\mathrm{u}$ . .. $\Delta_N^{d-1}u$ (et a fortiori $\Delta_N^m u$ pour $m\geq d$) présentent eux aussi une croissance exponentielle :

Théorème 2 Pour toute $u\in H_{Pb,N}$ et tout $k\in\{1,2,\ldots,d-1\}$, *il existe* $C_k>0$ telle que : $|(\Delta_N^k u)(x)|\leq C_k\exp(b\|x\|_N)$pour tout $x\in\mathbb{R}^N$.

On en déduit que H possède une croissance de type exponentiel. Plus precisément, on vérifie que, pour chaque $\varepsilon>0$, il existe $a_\varepsilon>0$ tel que, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$:

$$|H(x,t)|\leq a_\varepsilon\exp\left[\left(\sqrt{b^2+I_P^2}+\varepsilon\right)\|(x,t)\|_{N+1}\right]$$

en notant $I_P = \max_{\alpha\in\mathcal{Z}_P}\Im m\sqrt{\alpha}$ (avec la détermination principale du logarithme, $\sqrt{\alpha}$ est bien définie pour toute $\alpha\in\mathcal{Z}_P$). D'après le théorème 4.5 de [2], sa complexifiée $\widetilde{H}$ (i.e. la fonction entière dans $\mathbb{C}^{N+1}$ dont H est la restriction à $\mathbb{R}^{N+1}$) présente elle aussi une croissance exponentielle : il existe pour chaque $\varepsilon>0$, une constante $A_\varepsilon>0$ telle que

$$|\widetilde{H}(z,\eta)|\leq A_\varepsilon\exp\left[\left(\sqrt{b^2+I_P^2}+\varepsilon\right)L_{N+1}(z,\eta)\right]$$

pour tout $(z,\eta)\in\mathbb{C}^N\times\mathbb{C}$.

Dans la comparaison de la croissance d'une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^n$ avec celle de sa complexifiée dans $\mathbb{C}^n$, l'apparition de la norme de Lie, définie dans $\mathbb{C}^n$ par :

$$L_n(z) = \sqrt{\|z\|_n^2+\sqrt{\|z\|_n^4-\left|\sum_{1\leq j\leq n}z_j^2\right|}}\quad\left(\leq\sum_{1\leq j\leq n}|z_j|\right)$$

($\|\cdot\|_n$ désignant ici la norme euclidienne de $\mathbb{C}^n$) s'explique par le fait que la cellule d'harmonicité dans $\mathbb{C}^n$ d'une boule euclidienne $B_R = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_n\leq R\}$ est justement la boule de Lie $BL_R = \{z\in\mathbb{C}^n : L_n(z)\leq R\}$ (voir [1]) et que le maximum sur B_R d'une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^n$ est relié au maximum sur BL_R de sa complexifiée dans $\mathbb{C}^n$ (voir [2]).

En constatant (pour x fixé) que $\eta\mapsto H(x,\eta)$ est la transformée de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique qui apparaît, d'une part comme une combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac aux points $i\sqrt{\alpha}(\alpha\in\mathcal{Z}_P)$ et, d'autre part, comme une fonctionnelle analytique portable par le disque $D_{P,b} = \{\omega\in\mathbb{C} : |\omega|\leq\sqrt{b^2+I_P^2}\}$, on obtient, en considérant la transformation G (voir [3]) de cette fonctionnelle :

Théorème 3 *Soit* $u \in \mathcal{H}_{P,b,N}$. Si $\min_{\alpha \in \mathcal{Z}_P} |\alpha| > b^2 + I_P^2$, *alors* $u \equiv 0$ *dans* $\mathbb{R}^N$,

On constate de même que $z \mapsto \widetilde{H}(z, 0)$ (i.e. la complexifiée $\tilde{u}$ de u) possède une croissance de type exponentiel, plus précisément qu'elle appartient à l'espace $Exp(\mathbb{C}^N, D_{P,b}^N)$ des fonctions entières f dans $\mathbb{C}^N$ vérifiant les estimations suivantes :

pour chaque $\varepsilon > 0$, *il existe* $M_\varepsilon > 0$ *telle que*

$$|f(z)| \leq M_\varepsilon \exp\left[\left(\sqrt{b^2 + I_P^2} + \varepsilon\right)(|z_1| + \ldots + |z_N|)\right]$$

pour tout $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$. (Cet espace est l'ensemble des transformées de Fourier-Borel des fonctionnelles analytiques portables par le polydisque $D_{P,b}^N$ - voir [6]).

Les $\dfrac{\partial^{2j} \tilde{u}}{\partial z_N^{2j}} (j \in \mathbb{N})$ appartenant également à $Exp(\mathbb{C}^N,\ D_{P,b}^N)$ et leurs restrictions aux hyperplans $\{z_N = 0\}$ et $\{z_N = a\}$ à $Exp(\mathbb{C}^{N-1},\ D_{P,b}^{N-1})$, on démontre :

Théorème 4 *Soient* $a \in \mathbb{R}^*$ et $u \in \mathcal{H}_{P,b,N}$ *telle que* $\beta = \sqrt{b^2 + I_P^2} < \pi$ *et que ses dérivées partielles* $\dfrac{\partial^{2j} u}{\partial x_N^{2j}} (j = 0, 1, \ldots,\ d-1)$ *s'annulent sur* $\mathbb{N}^{N-1} \times \{0\}$ *et* $\mathbb{N}^{N-1} \times \{a\}$. *Si* $|a|\beta < \pi$, *alors* $u \equiv 0$ *dans* $\mathbb{R}^N$

Bibliographie

[1] *V. Avanissian* Cellules d'harmonicité et prolongement analytique complexe. Travaux en cours, Hermann, Paris, 1985.

[2] *V. Avanissian* Quelques applications des fonctionnelles analytiques . Annales Academiae Scientarum Fennicae Series A1 Mathematica, Volumen 15, 1990, 225- 245.

[3] *V. Avanissian, R. Gay* Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables Bull. Soc. Math. France, 103, 1975, p.341-484.

[4] *V. Avanissian, R. Supper* On the equation $P(\Delta)u = 0$, à paraître dans les Proceedings of the Conference on Theory of Functions and Applications (Yerevan, 18-19-20 septembre 1995).

[5] *R. Boas* An uniqueness theorem for harmonic functions. J.Approx. Theory 5 (1972), 425-427.

[6] *L. Hörmander* An introduction to complex analysis in several variables D.van Nostrand Company, Princeton 1966.

[7] *A. Martineau* Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel. J. Anal. Math. de Jérusalem XI, 1-164, 1963.

[8] *N. V. Rao*, Carlson theorem for harmonic functions in R^n J. Approx. Theory 12, 309-314, 1974.

[9] *R. Supper* Formules d'interpolation et théorèmes d'unicité pour des fonctions harmoniques de type exponentiel Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, Serie IV, Vol.XXI, 299-310, 1994.

[10] *D. Zeilberger* Uniqueness theorems for harmonic functions of exponential type. Proc. Amer. Math. Soc. 61, 335-340, 1976.

U.F.R. de Mathématique et d'Informatique, Université Louis Pasteur
C.N.R.S. (U.R.A. 01)
7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex (France)
supper@math.u-strasbg. fr