Sur la convergence faible uniforme des processus stochastiques.

Christine Sibeux

Soit $(X^{n,\theta})_{n\geq 1}$ une suite de semi-martingales dépendant du paramètre $\theta \in \mathbb{R}^m$ définies sur des espaces filtrés $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{F}^n, P^n)$. Pour θ fixé, la convergence en loi de la suite $(X^{n,\theta})_{n\geq 1}$ vers une semi-martingale X^θ a été étudiée par de nombreux auteurs (voir par exemple J. Jacod et A.N. Shiryayev [4] ou R.Sh. Lipster et A.N. Shiryayev [5]). Lorsque cette convergence a lieu, d'après le théorème de représentation de Skorohod (cf R.M. Dudley [1]), il existe un espace probabílisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ et des processus $\widetilde{X}^{n,\theta}$ et $\widetilde{X}^\theta$ tels que les lois de $\widetilde{X}^{n,\theta}$ et de $\widetilde{X}^\theta$ sous $\tilde{P}$ coïncident avec les lois de $X^{n,\theta}$ et de X^θ respectivement et tels que pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sup_{t\in[0,N]\cap T_\theta} \left|\widetilde{X}^{n,\theta} - \widetilde{X}^\theta\right| \overset{\tilde{P}-p.s.}{\longrightarrow} 0$$

avec $T_\theta = \{s \geq 0,\ \triangle\widetilde{X}^\theta_s = 0\}$.

Nous cherchons sous quelles conditions supplémentaires, la convergence précédente est uniforme (en θ) sur tous les compacts de $\mathbb{R}^m$. Ce type de convergence est très utile en statistique, notamment pour étudier la normalité asymptotique de certains estimateurs.

Nous nous restreignons au cas où nous pouvons définir des processus $X^n = (X^{n,\theta}_t)_{t\in\mathbb{R}^+,\theta\in\mathbb{R}^m}$ à trajectoires dans l'espace de Skorohod $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $C_{loc}(\mathbb{R}^m)$ où $C_{loc}(\mathbb{R}^m)$ désigne l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}^m$, muni de la loi de la convergence uniforme sur tout compact. Nous pouvons alors étudier la convergence en loi, dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$, de la suite $(X^n)_{n\geq 1}$. Les résultats classiques sur la convergence faible – valables dans tout espace $D(\mathbb{R}^+,\ S)$ où S est un espace polonais – donnent des conditions qui s'expriment à l'aide du module de continuité dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$, qui est défini de la façon suivante : si $(K_i)_{i\geq 1}$ désigne une suite de compacts croissant vers $\mathbb{R}^m$ et si X est une fonction réelle sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$, nous posons pour tout $i, N \in \mathbb{N}$ et $h > 0$

$$W^i_{h,N}(X) = \inf_{\substack{\{t_j\} \\ t_{j+1}-t_j>h}} \max_{0\leq j\leq n} \sup_{s,t\in[t_j,t_{j+1}[} \sup_{\theta\in K_i} \left|X^\theta_s - X^\theta_t\right|$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les subdivisions $0 = t_0 < \ldots < t_{n+1} = N (n \geq 1)$ de l'intervalle [0, N] vérifiant $t_{j+1} - t_j > h$ pour $j = 0, \ldots, n-1$. Nous cherchons des conditions en termes prévisibles pour assurer la convergence en loi dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ des processus X^n.

Dans un premier temps, en utilisant les travaux de L.Yu. Vostrikova [6] et [7], nous obtenons un critère de convergence en loi dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$. Ensuite, nous exprimons les conditions obtenues en termes prévisibles à l'aide des résultats classiques sur la convergence des processus et des estimations de K. Dzhaparidze, E. Valkeila [2] et de I.A. Ibragimov, R.Z. Has'minski [3].

Convergence en loi dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ Dans cette partie, nous exprimons les conditions assurant la convergence en loi dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ à l'aide de

$$W^\theta_{h,N}(X) = \inf_{\substack{\{t_j\} \\ t_{j+1}-t_j>h}} \max_{0\leq j\leq n} \sup_{s,t\in[t_j,t_{j+1}[} \left|X^\theta_s - X^\theta_t\right|$$

$$\text{et } \mathcal{K}^i_{h,N}(X) = \sup_{0\leq qt\leq qN} \sup_{\substack{\theta,\theta'\in K_i \\ |\theta-\theta'|\leq qh}} \left|X^\theta_t - X^{\theta'}_t\right|.$$

Théorème 1 *Supposons que pour tout* $i, N \in \mathbb{N}, \eta > 0, \theta, \theta_1,\ \ldots, \theta_l \in \mathbb{R}^m$, $(l \in \mathbb{N}^*)$ *et* $t, t_1, \ldots,\ t_k \in \mathbb{R}^+, (k \in \mathbb{N}^*)$ *nous avons*

(1) $(X^{n,\theta_1}_{t_1}, \ldots, X^{n,\theta_l}_{t_1}, \ldots, X^{n,\theta_1}_{t_k}, \ldots, X^{n,\theta_l}_{t_k}) \overset{\mathcal{L}(P^n)}{\longrightarrow} (X^{\theta_1}_{t_1}, \ldots, X^{\theta_l}_{t_1}, \ldots, X^{\theta_1}_{t_k}, \ldots, X^{\theta_l}_{t_k})$,

(2) $\lim\limits_{a\to+\infty} \overline{\lim_n} P^n \left(\sup\limits_{0\leq s\leq t} \left|X^{n,\theta}_s\right| \geq a \right) = 0.$

(3) $\lim\limits_{h\to 0} \overline{\lim_n} P^n \left(W^\theta_{h,N}(X^n) > \eta \right) = 0,$

(4) $\lim\limits_{h\to 0} \sup\limits_{n\geq 1} P^n \left(\mathcal{K}^i_{h,N}(X^n) > \eta \right) = 0.$

Alors, pour tout $n \geq 1_f$ *le processus* $X^n = (X^{n,\theta}_t)_{t\geq 0,\theta\in\mathbb{R}^m}$ *est à trajectoires dans* $D(\mathbb{R}^+, C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ *et la suite* $(X^n)_{n\geq 1}$ *converge en loi vers un processus* $\widetilde{X}$ *à trajectoires dans* $D(\mathbb{R}^+, C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ *et ayant les mêmes distributions finies-dimensionnelles que* X.

Critères de convergence faible dans $D(\mathbb{R}^+, C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ en termes prévisibles

Nous nous restreignons ici au cas où pour tout $\theta \in \mathbb{R}^m, X^\theta$ est un processus de diffusion qui est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX^\theta_t = b(t, \theta, X^\theta)dt + c(t, \theta,\ X^\theta)dW_t$$

avec X^θ_0 déterministe et $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien. Nous supposons que les fonctions b et c vérifient les conditions habituelles de Lipschitz, de croissance linéaire, de continuité et de prévisibilité. Nous nous limitons également au cas où pour tout $\theta \in \mathbb{R}^m$ et tout $n \geq 1$, le processus $X^{n,\theta}$ est une semi-martingale localement de carré intégrable. Dans ce cas, il existe un processus unique $\widetilde{B}^{n,\theta}$ prévisible, à trajectoires à variation localement integrable, tel que

$$X^{n,\theta} = X^{n,\theta}_0 + \widetilde{B}^{n,\theta} + X^{n,\theta,c} + \int_0 \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} xd\left(\mu^{n,\theta} - \nu^{n,\theta}\right)$$

où $X^{n,\theta,c}$ désigne la partie martingale continue de $X^{n,\theta}, \mu^{n,\theta}$ sa mesure des sauts et $\nu^{n,\theta}$ son compensateur. De plus, la martingale locale

$$M^{n,\theta} = X^{n,\theta,c} + \int_0 \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} xd\left(\mu^{n,\theta} - \nu^{n,\theta}\right),$$

qui apparaît dans la décomposition ci-dessus, est localement de carré intégrable.
Conditions du groupe I
Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}^m$, tout $L \in \mathbb{N}$ et tout $a \in]0, 1]$, nous avons :
(1) $X_0^{n,\theta} \xrightarrow{P^n} X_0^\theta$
(2) $\displaystyle\int_0^L \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x \leq \ \mathbb{I}_{(|x|>a)} d\nu^{n,\theta} \xrightarrow{P^n} 0$
(3) $\displaystyle\sup_{t\leq L} |\widetilde{B}_t^{n,\theta} - \int_0^t b\left(s, \theta, X^{n,\theta}\right) ds| \xrightarrow{P^n} 0$
(4) $\displaystyle\sup_{t\leq L} | < M^{n,\theta}, M^{n,\theta'} >_t - \int_0^t c\left(s, \theta, X^{n,\theta}\right) c\left(s, \theta', X^{n,\theta'}\right) ds| \xrightarrow{P^n} 0$
Conditions du groupe II
Nous introduisons le processus prévisible $\mathrm{Y}^{n,\theta,\theta'} = (Y_t^{n,\theta,\theta'})_{t\geq 0}$ défini par

$$\begin{aligned} Y_t^{n,\theta,\theta'} = & \left| X_0^{n,\theta} - X_0^{n,\theta'} \right|^p + < X^{n,\theta,c} - X^{n,\theta',c} >_t^{p/2} + \left| \widetilde{B}_t^{n,\theta} - \widetilde{B}_t^{n,\theta'} \right|^p \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}} (x-y)^{\leq} d\nu^{n,\theta,\theta'})^{p/2} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}} |x-y|^p d\nu^{n,\theta,\theta'} \end{aligned}$$

où $\nu^{n,\theta,\theta'}$ désigne le compensateur de la mesure des sauts du processus $(X^{n,\theta}, X^{n,\theta'})$.

Nous supposons que pour tout $i \in \mathbb{N}$, tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha > m$ et $p \geq \max(\alpha, 2)$ vérifiant, pour tout $\mathbb{F}^n$-temps d'arrêt τ à valeurs dans l'intervalle $[0, \mathrm{N}]$, les deux conditions suivantes
(4) $\displaystyle\sup_{n\geq 1} \sup_{\theta\in K} E^n(|X_\tau^{n,\theta} 1^p) < +\infty$
(5) $\displaystyle\sup \sup_{\theta\neq\theta} E^n(|\mathrm{Y}_\tau^{n,\theta,\theta'} n \geq 1 \theta_1 \theta' \in K_2 \ |^p \backslash |\theta - \theta' 1^\alpha) < +\infty.$

Théorème 2 *Supposons que les conditions des groupes I et II sont satisfaites. Alors, pour tout $n \geq 1$, le processus $X^n = (X_i^{n,\theta})_{t\geq 0, \theta\in\mathbb{R}^m}$ est à trajectoires dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ et la suite $(X^n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers un processus $\widetilde{X}$ à trajectoires dans $D(\mathbb{R}^+,\ C_{loc}(\mathbb{R}^m))$ et ayant les mêmes distributions finies-dimensionnelles que X.*

Bibliographie

[1] *R.M. Dudley.* Real analysis and probability. Chapman et Hall, Mathematic series, New-York, 1989.

[2] *Я. Dzhaparidze et E. Vatkeila.* On the Hellinger type distances for filtered experiments. Probability Theory and related Fields 85, p. 105-117, 1990.

[3] *I.A. Ibragimov, R.Z. Has'minski.* Statistical estmation : asymptotic theory. Springer, Berlin Heidelberg New-York, 1981.

[4] *J. Jacod et A.N. Shiryayev* Limit theorems for stochastic processes. Springer-Verlag, Berlin 1987.

[5] *R. Sh. Lipster et A.N. Shiryayev.* Theory of martingales. Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1989.

[6] *L. Yu. Vostrikova.* On the weak convergence of likelihood ratio processes of general statistical parametric models. Stochastics 23, p. 277-298, 1988

[7] *L. Yu. Vostrikova.* Divergence processes and weak convergence of likelihood ratio processes. Séminaire de Probabilités de Rennes I, p. 134-146, 1991.

Laboratoire de Statistiques et Processus
Département de Mathématiques, Université d'Angers,
2 Boulevard Lavoisier, 49045 Angers cedex, France
sibeux@tonton.univ-angers.fr