Propriétés de moyenne des fonctions CR sur une hypersurface.

Victoria Paolantoni

Si f, fonction donnée sur M, hypersurface lisse de $\mathbb{C}^n$, est la restriction d'une fonction holomorphe sur un voisinage de M alors f est annulée par les champs de vecteurs $(\neg L_{j1\leq j\leq n-1}$, où $(L_{s}\cdot)_{1\leq j\leq n-1}$ est une base des champs tangents complexes holomorphes. *Une fonction annulée par ces champs est dite de Cauchy-Riemann (noté $CR(M)$).* Le problème qui s'est posé à de nombreux auteurs est le problème réciproque, à savoir si une fonction CR donnée sur M peut se prolonger de fagon holomorphe à un voisinage de M, d'un côté de M ou des deux côtés de M. Ce problème est lié à la géométrie des points de M.

Précisons nos notations : $M = \{\rho\ (z_1,\ z_n) = 0\}$ où p est une fonction définissante de M.

$$L_j = \frac{\partial\rho}{\partial z_n}(0)\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial p}{\partial z_j}(0)\frac{\partial}{\partial z_n}\text{si}\frac{\partial p}{\partial z_n}(0) \neq 0$$

On note $\mathcal{L}_{z_o}$ la forme de Levi de M au point $z_0 \in M$ définie pour w appartenant au plan tangent complexe à M en z_0 par :

$$\mathcal{L}_{z_0}(\rho)(w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\overline{z_k}}\,(z_0)\,w_j\overline{w_k}$$

En 1911, E.E.Levi [3] démontre que pour un domaine strictement pseudoconvexe (i.e dont les valeurs propres de la forme de Levi sont strictement positives) de C^2 à bord lisse M, il existe des fonctions holomorphes qui n'ont pas de prolongement holomorphe à travers M du côté pseudoconcave. Puis en 1956, Lewy [4] a montré que tout germe de fonction CR se prolongeait au côté pseudoconvexe. Le résultat décisif dans ces questions d'extension de fonctions CR est donné par Trépreau [7] en 1986. Si M est une hypersurface C^2 de C^n et $z_0 \in M$ toute fonction CR près de z_0 se prolonge d'un côté de M si et seulement si M ne contient aucun germe d'hypersurface complexe passant par z_0. Cette condition géométrique correspond à la notion de minimalité introduite par Tumanov [8] en 1988. Tumanov généralise le théorème de Trépreau à des variétés de codimension supérieure à 1. Ces résultats utilisent la technique des disques analytiques. On considèrera des disques $\phi : \Delta \to \mathbb{C}^n$ holomorphes sur Δ (disque unité de $\mathbb{C}$) et de classe $C^\alpha(\overline{\Delta})$, attachés à M (i.e $\phi(\partial\Delta) \subset M$ et $\mathcal{C}^\alpha(\overline{\Delta}) = \left\{u : \overline{\Delta} \to \mathbb{R}; |u|_\alpha = sup_{\overline{\Delta}}|u| + sup_{x,y\in\overline{\Delta}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\right\}$). En utilisant le théorème d'approximation de Baouendi et Trèves [7] et le principe du maximum, on peut prolonger les fonctions $CR(M)$ à la réunion $\bigcup_\phi \phi(\overline{\Delta})$. Pour les fonctions holomorphes dans un ouvert, on a des propriétés de moyenne. Le but de notre travail est d'établir des propriétés de sous-moyenne pour les fonctions CR. On dit qu'il y a *extension holomorphe bilatérale de $f \in CR(U)$(U voisinage de* 0 *dans M] si et seulement s'il existe un voisinage V de θ dans $\mathbb{C}^n$ tel. que f soit la* *trace sur $V \cap M$ d'une fonction holomorphe F sur V.* Cette condition d'extension bilatérale entraîne l'hypoellipticité de l'opérateur de Cauchy-Riemann annulant les fonctions CR. On a alors la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit M une hypersurface de $\mathbb{C}^n$ contenant $0, U$ un voisinage de θ dans M. On a les implications suivantes : $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$*
(i) Toute fonction $f \in CR(U)$ se prolonge holomorphiquement des deux côleś de l'hypersurface
(ii) On a l'estimation de sous-moyenne pour f :

$$(*)|f(0)| \leq C(V) \int_{V \cap M} |f(z)| d\sigma_M(z)$$

où V est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$
(iii) la non existence de fonctions pics pour M.

Ce résultat est connu de F.Trèves [7] et nous proposons une approche différente basée sur les distributions valeur au bord [6] et le théorème du saut [2] de Chirka. Le but principal de notre travail est de préciser la constante $C(V)$ de $(*)$. Nos démonstrations seront basées sur la construction de disques analytiques attachés à M. On procède en deux étapes :

1ère étape : Estimation en des points d'un côté ou de l'autre de M.

On généralise un théorème de A.Boggess, R.Dwilewicz et A.Nagel établi en 1989 pour des hypersurfaces pseudoconvexes de type fini [1]. On a une distance associée aux hypersurfaces de type fini et en utilisant les boules anisotropes $B_M(p, \delta)$ associées à cette distance [5] et des disques analytiques particuliers, on démontre sans hypothèse de pseudoconvexité le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit M une hypersurface lisse dans $\mathbb{C}^n$ Soit p un point de M de type fini m. Il existe des constantes δ_0, C, A strictement positives, un côté de l'hypersurface Ω et un voisinage W de p dans Ω tels que :*

$$\forall Z \in \Omega \text{ tel que } \pi(Z) = p$$

$$\text{et } |Z - p| = C\Lambda_M(p, \delta) \text{ où } 0 < \delta \leq \delta_0$$

on a :

$$|u(Z)| \leq \frac{A}{|B_M(p, \delta)|} \int_{\zeta \in B_M(p,\delta)} |u(\zeta)| d\sigma_M(\zeta)$$

pour toute fonction u plurisousharmonique sur W et continue jusqu'au bord.

2ème étape : Estimation en des points de l'hypersurface M.

Dans le cas où on dispose d'une "stabilité" du type des points et de la propriété d'extension bilatérale, on démontre que la constante $C(V)$ est de la forme $\frac{Cte}{|B_M(p,\delta)|}$ où $|B_M(p, \delta)|$ est la mesure de la boule anisotrope. On démontre les théorèmes suivants :

Théorème 2 *Soit U ouvert de $C^n, M \subset U$ hypersurface réelle lisse contenant θ. Supposons que la forme de Levi de M en 0 admette une valeur propre positive et une négative. Alors il existe un voisinage V de θ dans l'hypersurface, une constante $C > 0$ et $\delta_0 > 0$ tels que pour toute fonction $fCR(V)$ on ait :*

$$\forall Z \in V \ \ et \ \forall 0 < \delta < \delta_0$$
$$|f(Z)| \leq \frac{C}{1B_M(Z,\delta)\}} \int_{B_M(Z,\delta)} |f(\zeta)1 d\sigma_M(\zeta)$$

La démonstration de ce théorème utilise le fait que dans un voisinage de 0, tous les points sont de type 2. Plus généralement, pour avoir des propriétés de moyenne, on aura besoin de se placer sous l'hypothèse suivante de "stabilité" $(S*)$:
Il existe une courbe transverse, réelle analytique C de M contenant 0 dont tous les points sont de type fini impair m.
Sous cette condition, nous utilisons les disques construits dans la démonstration du théorème II.1 pour obtenir l'estimation suivante :

Théorème 3 *Soit M une hypersurface de $\mathbb{C}^2$ de classe C^∞ vérifiant l'hypothèse $(S*)$. Alors il existe un voisinage V de θ dans M, une constante $C > 0$ et $\delta_0 > 0$ tels que pour toute fonction f $CR(V)$, on ait : $\forall \delta \in]0, \delta_0[$,*

$$|f(0)| \leq \frac{C}{|B_M(0,\delta)|} \int_{B_M(0,\delta)} |f(\zeta)| d\sigma_M(\zeta)$$

Bibliographie

[1] *A.Boggess, R.DuJilewicz et A.Naget* The hull of holomorphy of a non isotropic baU in a real hypersurface of finite type. Trans. A.M.S. 323 (1991), 209-232

[2] *E. Chirka* Analytic representation of *CR* functions. Math.USSR.Sbornik Vol.27 (1975) No.4, 526-553

[3] *E.E.Levi* Sulle ipersuperfici dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse. Ann.Mat.Pura Apppl.18 (1911), 69-79

[4] *H. Lewy* On the local character of the solutions of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables. Ann of Math. 64 (1956), 514-522

[5] *A. Nagel* Vector fields and nonisotropic metrics. Beijing Lectures in Harmonic Analysis, Annals of Math.Studies No 112, Princeton University Press (1986), 241-306w

[6] *E.Straube CR* distributions and boundary values of analytic functions . Dissertatíon submitted to the Swiss Federal institute of technology Zurich for the degree of doctor of Mathematics, Zurich (1983)

[7] *F*, *Trèves* Approximation and representation of functions and distributions annihilated by a system of complex vector fields. Ecole polytechnique (1981)

[8] *A. E. Tumanov* Extension of CR functions into a wedge from a manifold of finite type. Math.Sb.Nov.Ser.136 (1988), 128-139 ; English Transl.,Math. USSR Sbornik 64 (1989), 129-140

Equipe d'analyse complexe, U.R.A. 225
Université de Provence - Technopole de Château-Gombert
C.M.I. 39, rue Joliot-Curie- 13453, Marseille Cedex 13.
paolanto@gyptis.univ-mrs.fr