Equations intégrales de frontière
pour des problèmes de plaques polygonales à bord libre.

Christine Nazaret

On se propose d'étudier la déformation d'une plaque mince polygonale à bord libre sous chargement mécanique, par une méthode d'équations intégrales de frontière. Notons Ω l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ correspondant à l'intérieur de la plaque, de frontière $\Gamma = \cup_{j=1}^{N}\Gamma_j, \Gamma_j$ étant le j^{eme} côté du polygone.

Il s'agit de résoudre le problème variationnel

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^2(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H^2(\Omega) \end{array}\right. \tag{1}$$

où $a(u,v) = I\nu\Delta u\Delta v\Omega + (1-\nu)\partial_{ij}u\partial_{ij}vdx$ et ν est le coefficient de Poisson du matériau constituant la plaque $(0 < \nu < 1/2)$.

Lorsque Ω est régulier, ce problème (1) est équivalent au problème aux limites

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega \\ M_n(u) = \nu\Delta u + (1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \\ K_n(u) = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + (1-\nu)\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial n}\right) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array}\right. \tag{2}$$

dont la résolution par équations intégrales de frontière a été faite par Giroire et Nédélec [3]. Les opérateurs M_n et K_n sont appelés moment fléchissant et effort tranchant.

Nous obtenons les r$'\propto$ ultats suivants :

A. Problème variationnel

En utilisant un cadre général défini dans [4] et en s'inspirant d'idées développées dans [2], on définit un opérateur TMK qui agit sur des couples $(g,\ h)$ de $\mathcal{H}(\Gamma)$ sous espace de $\Gamma\mathrm{I}_{i=1}^{N} H^3\tilde{2}(\Gamma_j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ dont les éléments vérifient certaines conditions de compatibilité aux coins (cf. [4]). Dans un domaine régulier, l'opérateur TMK coïncide avec $(-K_n,\ M_n)$.

Definition 1 *Pour* u $\in H^2(\Delta^2,\Omega) = \{v \in H^2(\Omega);\ \Delta^2 v \in L^2(\Omega)\}_f$ *nous définissons* $T_{int}MK(u) \in (\mathcal{H}(\Gamma))$ ' *par :* $\forall (g,h) \in \mathcal{H}(\Gamma)$

$$\langle T_{int}MK(u),(g,h)\rangle = -\int_\Omega \Delta^2 uRdx + \int_\Omega \{\nu\Delta u\Delta R + (1-\nu)\partial_{ij}u\partial_{ij}R\}\,dx$$

où $R \in H^2(\Omega)$ *est un relèvement de* $(g,\ h)$, *i.e.* $\gamma_0 R = g$ *et* $\gamma_1 R = h(\gamma_0$ *et* γ_1 *étant les opérateurs trace et trace de la dérivée normale*).
Pour $u \in W_0^2(\triangle^2,\ \Omega')$ *(cf. [3]), nous définissons* $T_{ext}MK(u) \in ('H(\Gamma))'$ *de manière similaire sur* $\Omega' = R^2\backslash\overline{\Omega}$. *Nous définissons aussi* $[TMK(u)] = T_{int}MK(u) - T_{ext}MK(u)$.

On transforme (1) en un problème équivalent (3) avec $q = -T_{int}MK(u_E)$ où $u_E = E * f$ (E solution élémentaire du bilaplacien).

Lemma 1 *Le problème suivant admet une unique solution dans $V = H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ (polynôme de degré 1)*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Trouver } u \in V \textit{ tel que} \\ a(u,v) = \langle q, (\gamma_0 v, \gamma_1 v)\rangle, \\ \forall v \in V \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \textit{Trouver } u \in V \textit{ tel que} \\ \Delta^2 u = 0 \text{ dans } \Omega, \\ T_{int}MK(u) = q. \end{array}\right. \tag{3}$$

A l'aide de [1], on montre que pour une plaque strictement polygonale et pour des seconds membres f de (1) qui sont $L^2(\Omega)$ ou des diracs dans Ω, la solution u est dans $H^s(\Omega)$ avec $s > 5/2$.

2 Problème du bord

Notre but est de transformer notre problème en un système d'équations intégrales sur le bord. Nous donnons ici une représentation intégrale des solutions de $\Delta^2 u = 0$ dans Ω et Ω', à l'aide de l'opérateur TMK.

Proposition 1 *Soit $u \in H^2(\Omega) \times W_0^2(\Omega^l)$ telle que $\Delta^2 u = 0$ dans $\Omega \cup \Omega'$. Alors il existe $p \in P_1(R^2)$ tel que, pour tout $y \in R^2 \backslash \Gamma$,*

$$u(y) = \langle [TMK(u)], (\gamma_0 E(|\cdot - y|), \gamma_1 E(|\cdot - y|))\rangle + \int_\Gamma \frac{\partial \Delta E(|\cdot - y|)}{\partial n}(x)[u](x)d\gamma(x)$$
$$-(1-\nu)\int_\Gamma \frac{\partial^2 E(|\cdot - y|)}{\partial t \partial n}(x)\frac{d}{ds}[u](x)d\gamma(x) - \int_\Gamma M_n(E(|\cdot - y|))\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right](x)d\gamma(x) + p(y)$$

On veut obtenir une représentation intégrale du type double couche de la solution variationnelle du problème de Neumann biharmonique intérieur, où les inconnues intermédiaires sur le bord sont les sauts $[u]$ et $[\frac{\partial u}{\partial n}]$, comme dans [3]. Il nous suffit de coupler notre problème intérieur à un problème biharmonique extérieur en imposant à la quantité $[TMK(u)]$ d'être nulle.

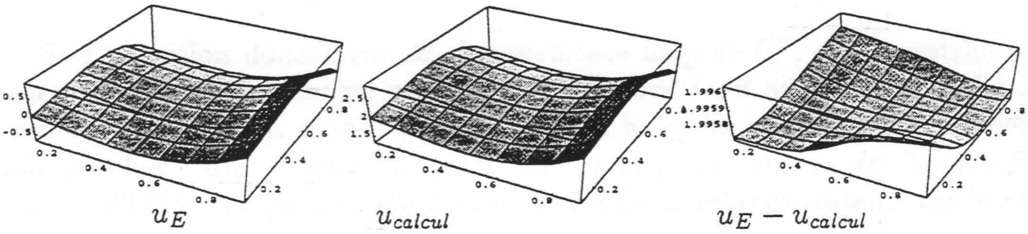
Enfin du problème au bord obtenu par couplage, nous donnons une formulation variationnelle sous forme d'équations intégrales portant sur les sauts. Cette formulation présente des noyaux non intégrables que nous éliminons à l'aide d'une technique développée par Nédélec pour obtenir un système d'équations intégrales.

3 Approximation

On se place dans le cas où Ω est une plaque carrée. Nous cherchons un espace d'éléments finis V_h approchant $\mathcal{H}(\Gamma)$. La résolution de (3) se ramène à la résolution d'un système linéaire que nous inversons. Nous obtenons alors les valeurs de $[u]$, $\frac{d}{ds}[u]$ et $[\frac{\partial u}{\partial n}]$ aux noeuds du maillage. L'étape suivante consiste à évaluer la solution à partir de ces sauts et de la Proposition 3.1.

Un exemple : $u_E(y_1, y_2) = 4y_1^3 - 5y_2^3 - 3y_1^2 + 4y_2^2$.

Figure 1 : déformation de la plaque : u_E exacte et calculée



Bibliographie

[1] *H. Blum et R, Rannacher*, On the Boundary Value Problem of the Bihannonic Operator on Domains with Angular Corners, Math. Meth. in the Appl. Sci 2 (1980), 556-581.

[2] *M. Bourlard2 S. Nicaise et L. Paquet*, Deux méthodes d'éléments finis frontières raffinés pour la résolution du problèine de Neumann dans un polygone, C.R. Acad. Sci. Paris, série I 305 (1987), 311-314.

[3] *J. Giroire et J.C. Nédélec*, A new system of boundary integral equations for plates with free edges, Math. Meth. in the Appl. Sci. 8 (1995), 755-772.

[4] *P. Grisvard*, Singularities in Boundary Value Problems, Research Notes in Appl. Math., vol. 22, Masson Springer-Verlag, 1992.

[5] *C. Nazaret*, Equations intégrales de frontière pour des problèmes de plaques polygonales à bord libre, C.R. Acad. Sci. Paris, sén e I 322 (1996).

Département de Mathématiques, URA CNRS 758,
Université de Nantes,
2, rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 03, France.
nazaret@math.univ-nantes.fr