Topologie des germes jacobiens

Hélène Maugendre

Mes travaux de recherche portent sur la théorie des singularités de germes de courbes planes complexes. Les domaines concernés par ce sujet sont :

- La topologie des singularités des hypersurfaces complexes.

- Les résolutions (plongées) des singularités des courbes planes.

- La théorie des noeuds.

- La monodromie entière des courbes planes.

- Les invariants polaires des courbes planes.

- Les revêtements ramifiés et variétés de dimension trois (varitétés de Seifert et de Waldhausen).

- La théorie des déformations.

Le point de départ des recherches effectuées dans le cadre de ma thèse est composé des articles Courbes polaires et topologie des courbes planes, Ann. Scien. E.N.S., 4ième série, t. 24, 1991, p.141-169, et sur le comportement des courbes polaires associées aux germes de courbes planes, Compositio Mathematica, 72, 1989, p. 87-113) de D.T. Lê, F. Michel et C. Weber. Dans le premier de ces articles, Une caractérisation précise d'invariants du type topologique d'un germe de fonction analytique f (appelés *quotients polaires de f*) y est donnée. De plus, dans le second article, D.T. Lê, F. Michel et C. Weber ont étudié ces quotients à travers la résolution minimale de f. Ils ont ainsi obtenu une méthode de calcul des quotients polaires de f, et ont décrit leur comportement dans la résolution minimale de f. Dans le même esprit, au cours de mon travail de recherches, j'ai été amenée à définir une théorie générale qui m'a permis de caractériser de façon précise de nouveaux invariants de type topologique et de les étudier en détail. Poursuivre plus loin l'étude de cette théorie constitue le premier de mes objectifs. Je vais tenter de résumer ici, ce en quoi il consiste précisément. Pour cela, il me faut tout d'abord expliquer succinctement la théorie mise en place. Elle consiste à étudier le *lieu jacobien* d'une paire de germes de fonctions analytiques de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$, noté $(g,\ f)$. Le lieu jacobien de (g,f) est defini comme suit. Nous considérons, en l'origine, le germe d'application analytique Φ donné par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2_{,0} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}^2_{,0} \\ (x,y) & \longmapsto & (g(x,y),f(x,y)) \end{array}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne de Φ est le germe D égal à :

$$D = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Nous appelons *germe jacobien* associé à (g, f) , le produit des composantes de D, avec multiplicité, qui ne divisent pas $f \cdot g$. Nous le notons $\hat{\mathcal{J}}$.

Remarques. - Si $f = \prod_{i=1}^{R} f_i^{r_i}$ et si $g = \prod_{i=1}^{S} g_j^{s_j}$ sont des décompositions de f et g en leurs facteurs irréductibles distincts, et si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ désignent les germes réduits $\tilde{f} = \prod_{i=1}^{R} f_i$ et $\tilde{g} = \prod_{j=1}^{S} g_j$, alors :

$$\hat{\mathcal{J}} = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}.$$

Si f et g sont à singularité isolée à l'origine, alors $\hat{\mathcal{J}} = D$.

Si $\hat{\mathcal{J}}$ évalué en zéro est non nul, il est clair que f et g sont lisses et transverses à l'origine. Sinon, le *lieu jacobien* de $(g,\ f)$, noté $\mathcal{J}$, est le germe de courbe réduit, lieu des zéros de l'équation $\hat{\mathcal{J}} = 0$.

Par exemple, si $f(x,\ y) = y^2$ et $g(x,y) = x^a - y^b$, avec $a > 1$, alors $\hat{\mathcal{J}}(x,y) = ax^{a-1}$.
La courbe $\mathcal{J}$ est donc l'axe d'équation $x = 0$. Par conséquent, $\mathcal{J}$ est lisse à l'origine.

Remarques. - Si le germe g est une forme linéaire transverse à f, alors le germe jacobien de $(g,\ f)$ est appelé *germe polaire* de f.

Le type analytique du lieu jacobien de (g, f) est un invariant du type analytique de $(g,\ f)$. En effet, s'il existe un isomorphisme analytique φ entre $\Phi_1 = (g_1, f_1)$ et $\Phi_2 = (g_2, f_2)$, alors $D(\Phi_2) = u(x,y) \cdot D(\Phi_1)$, où $u(0,0) \neq 0$. Par consequent, Φ_1 et Φ_2 ont même lieu jacobien. Par contre, le type topologique du lieu jacobien n'est pas un invariant du type topologique de (g, f) . Par exemple, les paires de germes $(y, x^3 - y^2)$ et $(y, x^3 - y^2 + x^2y^5)$, ont même type topologique, mais leurs lieux jacobiens respectifs sont $\{x\ = 0\}$ et $\{x = 0\} 1j \{3x + 2y^5\ = 0\}$. Ceux-ci ont clairement un type topologique différent.

L'image par Φ de J est une courbe appelée *courbe discriminante* de (g, f) . Nous la notons Δ. Désignons par $(u,\ v)$ les coordonnées complexes de $\Phi(\mathrm{C}_0^2)$. Par définition, $\{u = 0\} = \Phi(\{g = 0\})$ n'est pas une branche de Δ. Donc, si δ représente une branche de Δ, il existe un nombre rationnel strictement positif q_δ / p_δ (où q_δ est premier à p_δ), un entier strictement positif m et une paramétrisation de Puiseux de δ de la forme :

$$u = v^{\frac{q_\delta}{P_\delta}} \left(a + \sum_{k \in N^*} b_k v^{\frac{k}{m}} \right)$$

où $a \in \mathbb{C}^*, b_k \in \mathbb{C}$.

Nous appelons *ensemble des quotients jacobiens de* (g, f) , l'ensemble constitué des nombres rationnels q_δ / p_δ.

Remarque. - Dans le cas où g est une forme Iinéaire transverse à f, les nombres rationnels p_δ / q_δ sont les *quotients polaires* de f définis par B. Teissier et D.T. Lê.

Dans une première partie on donne une interprétation topologique précise des quotients jacobiens de (g, f) , qui permet de les calculer, d'une part, en termes d'enlacements d'entrelacs, et d'autre part, en termes d'exposants de contact dans la résolution minimale de $f \cdot g$. A l'aide de ces résultats on démontre que l'ensemble des quotients jacobiens de (g, f) est un invariant du type topologique de $(g,\ f)$.

Puis on établit les relations qui existent entre les quotients jacobiens de $(g,\ f)$ et les quotients polaires de f (ce sont les quotients jacobiens de $(\ell,\ f)$, où ℓ est une forme linéaire qui ne divise pas f), de g, et de $f \cdot g$. On étudie également le comportement de croissance des quotients jacobiens de $(g,\ f)$ dans la résolution minimale du produit de germes $f \cdot g$.

Une première application de ces résultats constitue la réponse à la question suivante, posée par les professeurs D.T. Lê et C. Weber dans le cadre de leur étude de la conjecture jacobienne :

Si $\mathcal{J}$ est lisse en l'origine, f ou g est-il lisse ?.

On montre que toute composante irréductible de f transverse à g et au germe jacobien $\hat{\mathcal{J}}$ est lisse et transverse aux autres composantes irréductibles de f. De nombreux exemples indiquent que, si f et g ne sont pas transverses, on ne peut pas espérer limiter la complexité topologique de la singularité du germe produit $f \cdot g$. Cependant, si f et g sont des germes transverses, je démontre qu'il existe $(a,\ b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, b \geq a \geq 2$, tel que $f \cdot g$ soit topologiquement équivalent au germe $y(x^a - y^b)$.

Bibliographie

[1] *E. Brieskorn et H. Knorrer* Plane Algebraic Curves. Birkhauser Verlag, 1986.

[2] *A. Chenciner* Courbes algébriques planes. Publications mathématiques de l'Université Paris 7, 1978.

[3] *W. Jaco et P. Shalen* Seifert Fibered Spaces in Three-Manifolds. A.M.S., Memoirs, n^o 220

[4] *D.T. Le* Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe. Ann. Inst. Fourier 23, fasc. 4, 1973, p. 261-270.

[5] *D. T. Le, F. Michel, C. Weber* Courbes polaires et topologie des courbes planes . Ann. Scien. E.N,S., 4ième série, T 24, 1991, p.141-169.

[6] *D. T. Le, F. Michel, C. Weber* Sur le comportement des courbes polaires associées aux germes de courbes planes. Compositio Mathematica, 72, 1989, p.87-113.

[7] *H. Maugendre* Topologie de germes de courbes planes à lieu jacobien lisse. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, t. 320, Série 1, p. 325-328, 1995.

[8] *H. Maugendre* Topologie des germes jacobiens. Thèse de doctorat, 1995.

[9] *J. Milnor* Singular Points of Complex Hypersurfaces. Princeton University Press, 1968.

[10] *F. Michle et C. Weber* Topologie des germes de courbes planes à plusieurs branches . prépublication de l'Université de Genève, 1985.

[11] *Saeki* Topological Types of Complex Isolated Hypersurface Singularities. Kodai Math. J. 12 (1989), p.23-29.

[12] *B. Teissier* Singularities, Arcata 1974 . Proc. AMS Symp., n^o 29.

C.M.I.
39 rue Joliot-Curie
13 453 Marseille Cedex 12
maugendr@gyptis.univ-mrs.fr