Stabilisation interne de l'équation des ondes.

Solange Kouémou Patcheu

Ce travail entre dans le cadre du contrôle des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$, de frontière Γ régulière. On fixe deux nombres $p > 1, q \geq 1$ et on considère une fonction continue et strictement croissante g, vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} g(0) = 0 & \\ c_1|s|^p \leq |g(s)| \leq c_2|s|^{1/p}, & \text{si } |s| \leq 1 \\ c_3|s| \leq |g(s)| \leq c_4|s|^q, & \text{si } |s| > 1 \end{array} \right. \tag{1}$$

Par exemple, la fonction

$$g(s) := \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{s}, & \text{si } s \geq 0 \\ -s^2, & \text{si } s \leq 0 \end{array} \right.$$

vérifie (1) avec $p = q = 2$.
Considérons l'équation des ondes avec une perturbation non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' - \Delta u + g\left(u'\right) = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \text{ et } u'(0) = u_1 \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \tag{2}$$

D'après Haraux [3], pour $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ donné quelconque ; ce problème admet une solution unique

$$u \in C\left([0, \infty); H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, \infty); L^2(\Omega)\right)$$

et l'énergie $E : [0, \infty) \to [0, \infty)$ de la solution, définie par

$$E = 1/2 \int_\Omega |u'|^2 + |\nabla u|^2 dx,$$

est une fonction décroissante. Concernant la *vitesse* de décroissance, il est connu d'après des travaux de Haraux [3] et Zuazua [8] que

$$E(t) \leq c\left(\Omega, u_0, u_1\right) t^{-2/(p-1)}, t > 0.$$

Notre objectif est d'estimer la constante c(Ω, u_0, u_1) .
Théorème 1 *Supposons que* $(n-2)q \leq n+2$ *dans* (1). *Alors on a l'estimation*

$$E(t) \leq c(\Omega)\left(1 + E(0)^{\frac{pq-1}{q(p-1)}}\right) t^{\frac{-2}{p-1}}, \qquad \forall t > 0 \ , \tag{3}$$

où la constante $c(\Omega)$ *dépend seulement de* Ω.

Ce théorème améliore des résultats antérieurs de Conrad-Leblond-Marmorat[2], Carpio [1] et Souplet [7], en affaiblissant leurs hypothèses sur la fonction g et/ou en rendant meilleures les estimations. Notre méthode est différente et semble être plus simple.

Nous décrivons maintenant les idées de la démonstration. Il suffit de montrer que

$$\int_s^T E^{\frac{p+1}{2}} \leq c(\Omega)\left(1 + E(0)^{\frac{pq-1}{2q}}\right) E(S), \quad 0 \leq S < T \tag{4}$$

Pour conclure, on appliquera des résultats antérieurs de Komornik [4]. On multiplie l'équation par $uE^{\frac{p-1}{2}}$ et on intègre par parties sur $\Omega \times [S, T]$:

$$\begin{aligned} 2\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}} \mathrm{dt} = &- \left[E^{\frac{p-1}{2}} \int_\Omega u' u \mathrm{dx}\right]_S^T + \frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}} E' \int_\Omega u' u \mathrm{dxdt} \\ &+ \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_\Omega \left(2\left|u'\right|^2 - ug\left(u'\right)\right) \mathrm{dxd}t \end{aligned} \tag{5}$$

Il faut majorer le second membre. On applique les inégalités de Hölder et Young, on trouve :

$$\begin{aligned} -\left[E^{\frac{p-1}{2}} \int_\Omega u' u\right]_S^T + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_\Omega 2\left|u'\right|^2 + \frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}} E' \int_\Omega u' u \\ \leq c(\Omega) E(0)^{\frac{p-1}{2}} E(S) + \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}} \mathrm{dt} \end{aligned} \tag{6}$$

En remplaçant le résultat trouvé dans l'identité précédente, on a

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}} \mathrm{dt} \leq c(\Omega) E(0)^{\frac{p-1}{2}} E(S) + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_\Omega \left|ug\left(u'\right)\right| \mathrm{dxdt} \tag{7}$$

Si on applique encore les inégalités de Hölder et Young, on obtient

$$E^{\frac{p-1}{2}} \int_\Omega \left|ug\left(u'\right)\right| \mathrm{dx} \leq c(\Omega) E^{\frac{p}{2}} \left|E'\right|^{\frac{q}{q+1}} \leq \frac{1}{3} E^{\frac{p(q+1)}{2}} + c(\Omega)\left|E'\right| \tag{8}$$

Ceci ne permet pas de conclure. Pour avoir une bonne majoration, il faut décomposer d'une manière astucieuse $E^{\frac{p}{2}}$:

$$E^{p/2} \left|E'\right|^{q/(1+q)} = \left(\left|E'\right|^{q/(q+1)} E^{(pq-1)/2(q+1)}\right)\left(E^{(p+1)/2(q+1)}\right) \tag{9}$$

Appliquant l'inégalité de Young avec les exposants $\frac{q+1}{q}$ et $q+1$, on en déduit que

$$c(\Omega) E^{p/2} \left|E'\right|^{q/(1+q)} \leq c(\Omega) E(0)^{\frac{pq-1}{2q}} \left|E'\right| + \frac{1}{3} E^{\frac{p+1}{2}} \tag{10}$$

Substituant (8)-(10) dans (7) on trouve

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}} \mathrm{dt} \leq c(\Omega)\left(1+E(0)^{\frac{pq-1}{2q}}\right) E(S) \tag{11}$$

d'où (4). Prenant la limite quand $T \to +\infty$ on obtient

$$\int_S^{+\infty} E^{\frac{p+1}{2}} \mathrm{dt} \leq c(\Omega)\left(1+E(0)^{\frac{pq-1}{2q}}\right) E(S),\ \forall S \geq 0 \tag{12}$$

Appliquant un résultat de Komornik [4], théorème 9.1, p 124, on en déduit le théorème.

Voir [5], [6] pour la démonstration détaillée et les résultats plus généraux.

Bibliographie

[1] *A. Carpio*, Sharp estimates of the energy for the solutions of some dissipative second order evolution equations, Potential Analysis 1 (1992), 265-289.

[2] *F. Conrad, J. Leblond and J. P. Marmorat*, Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback, Proc. of the Fifth IFAC Symposium on Control of Distributed Parameter Systems, Perpignan, june 1989, A. El Jai and M. Amouroux Eds., 101-116.

[3] *A. Haraux*, Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains, Mathematical Reports, Vol. 3, Part 1, J. Dieudonné Editor, Harwood Academic Publishers, Gordon and Breach, 1987.

[4] *V. Komornik*, Exact controllability and stabilization, the multiplier method, Research in Applied Mathematics, John Wiley& Sons and Masson (1994).

[5] *S. Kouémou Patcheu*, On the decay of solutions of some semilinear hyperbolic problems, à paraître dans PanAmerican Mathematical Journal,6, numéro 3,1996.

[6] *S. Kouémou Patcheu*, Stabilisation interne de certains systèmes distribués semilinéaires, Thèse de Doctorat de l'Université de Strasbourg I, 1995.

[7] *P. Souplet*, Th\ $\propto$ e de Doctorat de 1'Universite' Paris VI, 1994,

[8] *E. Zuazua*, Stability and decay estimates for a class of nonlinear hyperbolic problems, Asymptotic Analysis 1. (1988), 161-185.

Institut de recherche mathématique avancée (URA 01 CNRS)
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
kouemou@math :u-strasbg.fr