Solutions autosimilaires pour une équation en milieux poreux avec terme source.

Anne Keffa

Cet exposé est consacré à l'étude des solutions autosimilaires positives de l'équation parabolique dégénérée

$$\begin{gathered} \varphi_t(t,x) = |\varphi|^q \Delta\varphi(t,x) + |\varphi|^{p-1}\varphi(t,x) \\ (t,x) \in]0,+\infty[\times R^n \\ 0 < q < 1 \quad \text{et} \quad p > q+1 \end{gathered} \tag{1}$$

Les solutions autosimilaires positives de cette équation sont telles que si $\varphi(t,x)$ est solution de (1) alors il en est de même de $\varphi_\alpha(t,\ x)$ avec

$$\varphi(t,\ x) = \alpha^k \varphi(\alpha^l t, \alpha x) \ \ \forall \alpha > 0,$$

$$k = \frac{2}{p-q-1} \ \text{ et } \ l = \frac{2(p-q)}{p-q-1}.$$

Si on pose $r = 1x1t^{-\frac{1}{l}}$ et $u(r) = \varphi(1,\ r)$ l'équation (1) pour $\varphi(l,\ x)$ est équivalente pour $u(r)$ à :

$$\left\{ \begin{array}{l} |u|^q u''(r) + \left(\frac{n-1}{r}\right) |u|^q u'(r) + \frac{r}{l} u'(r) + \frac{k}{l} u(r) + |u|^{p-1} u(r) = 0,\ \forall r > 0, (*) \\ u(0) = x_0 > 0 \\ u'(0) = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Les principaux résultats énoncés sont montrés pour les valeurs de p et q vérifiant les hypothèses suivantes :

$$0 < q < \ 1,\ p > q+1,\ p - q < \frac{n+2}{n-2},\ k < \frac{n}{1-q} \Leftrightarrow \frac{p-q-1}{1-q} > \frac{2}{n}.$$

Le but de cet article est de démontrer l'existence d'une solution autosimilaire positive à symétrie radiale, de classe C^1 et à support compact en espace de l'équation (1). Pour celà on étudie les solutions positives de l'équation différentielle (2) vérifiée par le profil des solutions autosimilaires et on montre le résultat suivant.

Théorème 1 *Soit* $\alpha = \inf\{x_0 > 0,\ u(r,\ x_0) > 0, \forall r \geq 0\}$, *alors* $0 < \alpha < +\infty$, *il existe* $z = z(\alpha)$ *tel que* $u(r,\ \alpha) > 0, \forall r \in [0, \alpha[$ *et* $u(z,\alpha) = u'(z,\ \alpha) = 0$.

Pour démontrer ce théorème on définit tout d'abord $T^*(x_0)$ le temps maximal d'existence d'une solution positive de l'équation (2) . On établit que si $u(r,x_0)$ est strictement positive sur R^{+*} alors $T^*(x_0) = +\infty$, et $\lim_{r\to T^*(x_0)} u\,(r,x_0) = \lim_{r\to T^*}(x_0)\, u'\,(r,x_0) = 0$. Sinon on a $T^*(x_0) < +\infty, \lim_{r\to T^*(x_0)} u\,(r,x_0) = 0$ et $\lim_{r\to T^*(x_0)} u'\,(r,x_0) \leq 0$.

On peut donc définir les ensembles suivants :

$$\begin{gathered} A = \{x_0 > 0 \backslash T^*\,(x_0) = +\infty\} \\ B = \{x_0 > 0 \backslash T^*\,(x_0) < +\infty\} \end{gathered}$$

et

$$B = B_1 U B_2$$

avec

$$B_1 = \{x_0 \in B \backslash u'(T^*(x_0)) < 0\}$$
$$B_2 = \{x_0 \in B \backslash u'(T^*(x_0)) = 0\},$$

La première étape de la démonstration consiste à montrer par des méthodes classiques que A et B sont non vides. Ceci entraîne en particulier que $0 < \alpha < +\infty$. Ensuite on montre, grâce à l'analyse des solutions dans le plan de phase, que A est un ensemble ouvert. Enfin dans la troisième étape on prouve que B_1 est aussi un ensemble ouvert. On peut alors conclure que B_2 est non vide et que α appartient à B_2, ce qui est le résultat énoncé dans le théorème.

Bibliographie

[1] *H. Brezis, L.A. Peletier, D. Teman* A very singular solution of the heat equation with absorbtion. Arch. Rational Mech. Anal. p.186-209 (1986).

[2] *M. Escobedo, O. Kavian* Variational problems related to self similar solutions of the heat equation . Nonlinear Anal. **11**, pp.1103-1133 (1987).

[3] *A. Haraux, F. B. Weissler* Non-uniqueness for a semilinear initial value problem . Ind. Univ. Math. J. **31**, pp.167-189 (1982).

[4] *D. D. Joseph, T. S. Lundgren* Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources . Arch. Rational Mech. Anal. **49**, pp. 241-249 (1973).

[5] *L. A. Peletier, D. Ternan* A very singular solution of the porous medium with absorbtion. J.Diff.eq. *65*, pp. 396-410 (1986).

[6] *L. A. Peletier, D. Teman, F. B. Weissler* On the equation $\Delta u + \frac{1}{2}x\nabla u + f(u) = 0$, Arch. Rat. Mech. Anal. **94**, pp.83-89 (1986).

[7] *Y. W. Qi* . Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **123A**, pp. 373-390, (1993).

[8] *F. B. Weissler* Rapidly Decaying Solutions of an ordinary differential equation with application to semilinear elliptic and parabolic partial differential equations. Arch. Rat. Mech. Anal. **91**, number 3, pp. 247-266 (1986).

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications URA CNRS 742,
Institut Galilée, Université Paris Nord,
Avenue J.B Clément F-93430 Villetaneuse.
Kelfa@math.univ-paris13.fr