Les suites universellement représentatives en moyenne.

Catherine Gamet

Notre domaine de recherche est la théorie ergodique, et plus précisément l'étude de théorèmes ergodiques multidimensionnels. Les résultats qui ont été exposés dans le cadre de ce forum ont été obtenus en collaboration avec Dominique Schneider (docteur de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg) et font l'objet d'un article accepté pour publication aux Annales de l'Institut Henri Poincaré.

Nous considérons un espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ que nous supposons complet, sur lequel nous définissons une suite $\{S_k,\ k \geq 1\}$ de vecteurs aléatoíres à valeurs dans $\mathrm{Z}^{\mathrm{d}}, d \geq 1$.

Soit $(Y, \mathcal{A}, \mu, \mathcal{T})$ un système dynamique mesuré, c'est-à-dire la donnée d'un espace probabilisé $(Y, \mathcal{A}, \mu)$, la donnée d'une transformation mesurable, bijective, T sur Y, compatible avec l'action de $\mathbb{Z}^d$ et telle que $T\mu = \mu$. Introduisons maintenant la notion de suites universellement représentatives.

Définition 1 *Une suite de vecteurs aléatoires* $S = \{S_k,\ k \geq 1\}$ *à valeurs dans* $\mathbb{Z}^{\mathrm{d}}$, *d'espace d'épreuves* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ *est universellement représentative pour* $L^p, p > 1$, *s'il existe* $\Omega_0 \subset \Omega$ *presque sûr tel que pour tout* $\omega \in \Omega_0$ *nous avons* :

pour tout système dynamique mesuré $(Y, \mathcal{A}, \mu, \mathcal{T})$, *pour tout* $f \in L^p(\mu)$,

$$\mu \left\{ y : \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(T^{S_k(\omega)} y\right) \text{ existe} \right\} = 1.$$

Par exemple pour $d = 1$, la suite $\{p_k + \theta_k,\ k \geq 1\}$ où p_k désigne le $\mathrm{k}^{\text{ième}}$ nombre premier et $\{\theta_k,\ k \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et possédant un moment d'ordre strictement positif, est universellement représentative pour $L^p, p > 1$ (voir [9] à ce sujet).

Toujours dans le cas où $d = 1$, M. Lacey, K. Petersen, D. Rudolph et M. Wierdl (cf. théorème 5, [8]) ont montré

Théorème 1 *Soit* $X = \{X_k,\ k \geq 1\}$ *une suite de variables indépendantes, identiquement distribuées, telle que* $\mathrm{E}X_1 \neq 0$ *et* $\mathrm{E}(X_1)^2 < \infty$. *Alors, la suite*

$$S = \left\{ \sum_{j=1}^{k} X_j, k \geq 1 \right\}$$

est universellement représentative pour $L^p, p > 1$.

Dans le cas où $d \geq 2$, ils ont obtenu le résultat suivant (cf. théorème 7, [9]) : Si $f \in L^2(\mu)$, alors

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in\mathcal{N}}} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\infty T^{S_k} \text{ existe, } \mu\text{-presque partout,}$$

où $\mathcal{N} = \left\{ \left[\in^{\sqcup \log \sqcup} \right], \quad \sqcup \in \ \mathbf{N}^* \right\}$.

Les techniques utilisées par M. Lacey, K. Petersen, D. Rudolph et M. Wierdl dans [9], telles que la loi du logarithme itéré de Hartmann-Winter ne permettent pas d'obtenir la convergence ponctuelle pour l'index total. C'est la raison pour laquelle ils ont précisé cette situation avec le théorème suivant (cf. théorème 8, [9]) :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N(\log N \log N)^{\frac{1}{4}}} \sum_{k=1}^{N} f\infty T^{S_k} = 0, \quad \mu\text{-presque partout .}$$

Il est donc naturel de s'interroger sur le problème de la convergence en moyenne des moyennes ergodiques du type précédent. Plus précisément, nous introduisons la notion de suite aléatoire universellement 2-représentative en moyenne.

Définition 2 *Une suite de vecteurs aléatoires* $S = \{S_k, \ k \geq 1\}$ *à valeurs dans* $\mathbb{Z}^{\mathrm{d}}$, *d' espace d'épreuves* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ *est universellement* 2*-représentative en moyenne, s'il existe* $\Omega_0 \subset \Omega$ *presque sûr, tel que pour tout* $\omega \in \Omega_0$ *nous avons :*
pour tout système dynamique mesuré $(\mathrm{Y}, \ A, \mu, T)$, *pour tout* $f \in L^2(\mu)$,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\infty T^{S_k(\omega)} \text{ existe au sens } L^2(\mu).$$

Nous obtenons alors le résultat suivant :

Théorème 2 *Soit* $X = \{X_k, \ k \geq \ 1\}$ *une suite de vecteurs aléatoires indépendants, identiquement distribués, à valeurs dans* $\mathbb{Z}^d$ *et d'espace d'épreuves* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$. *Supposons qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\mathrm{E}|X_1|^\delta < \infty$.
Alors la suite de vecteurs aléatoires $S = \{\sum_{j=1}^{k} X_j, \ k \ \geq \ 1\}$ *est universellement 2-représentative en moyenne.*

Ce résultat est encore valable si T est une contraction positive de $L^2(\mu)$.

Dans le cas où la suite $X = \{X_k, \ k \geq 1\}$ désigne une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes, nous savons que la suite des sommes partielles n'est pas universellement représentative (Cf. théorème 4 dans [9]). Plus généralement cette situation se produit dès que $\mathrm{E}(X_1)^2 < \infty$ et $\mathrm{E}X_1 = 0$, et pourtant dans ce cas, la suite des sommes partielles est 2-représentative en moyenne. Ceci fournit donc des exemples de suites vérifiant un théorème ergodique en moyenne, mais pas ponctuellement.

Bibliographie

[1] *X. Fernique*, Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires, Proba. Th. Rel. Fields 88 521-536 1991

[2] *X. Fernique*, Un exemple illustrant l'emploi des méthodes gaussiennes, à paraître dans les actes de la "Conférence en l'honneur de J.-P. Kahane" Paris Juillet 1993

[3] *X. Fernique*, Une majoration des fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs vectorielles, C. R. Acad. Sci. Paris 300 315-318 1985

[4] *X. Fernique*, Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces Lusiniens, Expositiones Mathematicae 1990

[5] *C. Gamet*, Théorèmes de convergence en moyenne et entropie métrique en théorie ergodique,, Thèse, Prépublication IRMA 1996.

[6] *C. Gamet, D. Schneider*, Théorèmes ergodiques multidimensionnels et suites aléatoires universellement représentatives en moyenne,, Ann. Inst. Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques (à paraître).

[7] *U. Krenget*, Ergodic Theorems, W. de Gruyter 1985

[8] *L. Kuipers et H. Niederreitter*, Uniform distribution of sequences, Wiley New-York 1974

[9] *M. Lacey, K. Petersen, D. Rudolph - et M. Wierdl*, Random ergodic theorems with universally representative sequences, Ann. Inst. Henri Poincaré 1994

[10] *E. Lesigne*, Spectre quasi-discret et théorème ergodique de Wiener-Wintner pour les polynômes, Ergodic Theory and Dynamical system 13 767-784, Ergod. Th. and Dynam. Syst., 1993

[11] *D. Schneider*, Convergence presque sûre de moyennes ergodiques perturbées, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I 319 1201-1206 1994

[12] *D. Schneider*, Convergence presque sûre de moyennes ergodiques perturbées, Thèse prépublication I.R.M.A. 1994

[13] *D. Schneider et M. Weber*, Weighted averages of contractions along subsequences, à paraître dans les actes de la "Conference on almost everywhere convergence in ergodic and probability theory" Columbus Ohio State University USA Juin 1993

Institut de Recherche de Mathématique avancée
7 rue René Descartes 67084 Strasbourg Cedex
gamet@math.u-strasbourg.fr