Démonstration analytique et démonstration probabiliste pour un résultat d'unicité

Myriam Fradon

Il y a essentiellement deux façons de définir la dérivée d'une fonction : par intégration par parties (définition au sens des distributions) ou par dérivation direction par direction (définition au sens de Gâteaux). C'est pourquoi l'espace de Sobolev H^1 des fonctions L^2 à dérivéeL^2 admet deux définitions équivalentes :

$$\begin{aligned} H^1 &= \left\{ f \in L^2(dx) | \exists \nabla f \in L^2(dx) \forall u \in \mathcal{C}_c^\infty \int \nabla f u dx = -\int f \nabla u dx \right\} \\ &= \left\{ f \in L^2(dx) | \forall k \in \mathbb{R}^d \nabla f(x+sk) \cdot k = \frac{df(x+sk)}{ds} \in L^2(dx) \right\} \end{aligned}$$

Cet espace H^1 est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit de sa norme $||f||_{H^1}^2 = ||f||_{L^2}^2 + ||\nabla f||_{L^2}^2$ et il est habituel de noter H_0^1 l'adhérence dans H^1 de l'espace C_c^∞ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^d$. On sait que lorsqu'on se place sur $\mathbb{R}^d$ tout entier, ce qui est le cas ici, on a l'égalité : $H^1 = H_0^1$.
Question : Cette égalité est-elle toujours vraie si on remplace, dans la définition de H^1, la mesure de Lebesgue dx par une autre mesure de référence ?

La nouvelle mesure de référence doit être assez régulière pour que l'intégration par parties soit définie. On prend une mesure de la forme $\phi^2(x)dx$ où $\phi \in H^1$ Dans ce cas, on sait que l'égalité ci-dessus reste vraie (cf [7] et [8]) mais les démonstrations existantes consistaient en un mélange sophistiqué d'Analyse et de Probabilités, alors que le problème peut être vu comme purement analytique ou (via la théorie des formes de Dirichlet) purement probabiliste. Dans l'article [1], P. Cattiaux et moi-même proposons une preuve analytique et une preuve probabiliste de ce résultat. Le but de l'exposé était de donner une idée des techniques utilisées dans ces preuves, et de montrer à quel point il peut être pratique d'utiliser certains outils d'Analyse Fonctionnelle en Probabilités, ou certains outils probabilistes pour traiter des problèmes d'Analyse Fonctionnelle.

Sur $\mathbb{R}^d$, on fixe $\phi \in H^1$, ce qui nous donne la nouvelle mesure de référence $\phi^2 dx$. On note $L^2(\phi)$ l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à $\phi^2 dx$ et $H^1(\phi)$ l'analogue de H^1 dans ce nouveau contexte :

$$\begin{aligned} H^1(\phi) = \{ f \in L^2(\phi) | \exists \overline{\nabla} f \in L^2(\phi) \forall u \in \mathcal{C}_c^\infty & \int (\overline{\nabla} f) u \phi^2 dx = \cdots \\ & \cdots = -\int f(\nabla u)\phi^2 dx - 2\int f u \frac{\nabla \phi}{\phi} \phi^2 dx \} \\ = \{ f \in L^2(\phi) | \forall k \in \mathbb{R}^d \overline{\nabla} f(x+sk) \cdot k &= \frac{df(x+sk)}{ds} \in L^2(\phi) \} \end{aligned}$$

On munit cet espace de la norme $\|f\|^2_{H^1(\phi)} = \|f\|^2_{L^2(\phi)} + \left\|\overline{\nabla} f\right\|^2_{L^2(\phi)}$, c'est alors un espace de Hilbert, et on note $H^1_0(\phi)$ l'adhérence de C^∞_c dans cet espace de Hilbert. On veut montrer que $H^1_0(\phi) = H^1(\phi)$.

Líen avec les Probabiliteś :

Quand μ est une probabilité et H un sous-espace de $L^2(\mu)$, on dit que $\mathcal{E} : H \times H \to \mathbb{R}$ est une forme de Dirichlet (cf [4]) si $\mathcal{E}$ est bilinéaire symétn.que positive, si H muni de $\sqrt{||f||^2_{L^2(\mu)} + \mathcal{E}(f,f)}$ est un espace de Hilbert et si, $\forall f \in H, \overline{f} = \inf(1, \sup(0,\ f))$ vérifie $\mathcal{E}(\overline{f}, \overline{f}) \leq \mathcal{E}(f,f)$. Toute forme de Dirichlet admet un générateur A défini par la relation $\mathcal{E}(f,g) = -(Af, g)_{L^2(\mu)}$.

Si C^∞_c est dense dans H, cette forme admet également un processus de Markov associé, défini comme le processus de semi-groupe de transition $(e^{tA})_{t>0}$. Par exemple, si μ est la mesure de Lebesgue et si $H = H^1$, alors $\mathcal{E}(f,g) = \frac{1}{2}\int \nabla f.\nabla g dx$ et $Af = \frac{1}{2}\Delta f$, et le processus associé est le mouvement Brownien. Dans le cas qui nous intéresse, $\mu = \phi^2 dx$ et $H = H^1_0(\phi)$, donc la forme de Dirichlet est $\mathcal{E}_\phi(f,g) = \frac{1}{2}\int \overline{\nabla} f.\overline{\nabla} g dx$ et le processus associé est solution de $dX_t = dW_t + \frac{\nabla\phi}{\phi}(X_t)dt$.

Preuve analytique :

Une première méthode pour démontrer que $H^1(\phi) \ = \ H^1_o(\phi)$ est d'utiliser une suite régularisante $(J_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Pour toute $f \ \in \ H^1(\phi)$, $J_\varepsilon \ * \ f$ est C^∞ et on a $(J_\varepsilon * f)\phi \xrightarrow{L^2(dx)} f\phi$ et $(J_\varepsilon * \overline{\nabla} f)\phi \xrightarrow{L^2(dx)} \overline{\nabla} f\phi$ et de plus, grâce à la relation $\overline{\nabla}(fg) = f\overline{\nabla} g + g\overline{\nabla} f$, on peut montrer que $(J_\varepsilon * \overline{\nabla} f) - \nabla(J_\varepsilon * f)\phi \xrightarrow{L^2(dx)} 0$ ce qui implique la densité de C^∞ dans $H^1(\phi)$. Un rapide raisonnement de troncature donne alors la densité de C^∞_c.

Preuve probabiliste :

Une deuxième façon de démontrer l'égalité $H^1(\phi) = H^1_0(\phi)$ est d'utiliser la loi Q_ϕ du processus associé à la forme $\mathcal{E}_\phi$. On explicite Q_ϕ grâce au théorème de Girsanov, puis on montre que sous Q_ϕ, la probabilité de $(\inf\{t \geq 0/\phi(X_t) \notin]\frac{1}{n}; n[\} < +\infty)$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. Ceci signifie que, localement, on peut se ramener par des techniques de théorie du potentiel au cas où $\phi^2 dx$ et dx sont équivalentes. La densité de C^∞_c dans H^1 implique alors celle dans $H^1(\phi)$.

Applications et extensions :

Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}^d$ On note Q_μ la loi du processus partant de μ et solution de $dX_t = dW_t + \frac{\nabla\phi}{\phi}(X_i)dt$. On dit que μ est *stationnaire* si la loi de X_t sous Q_μ est μ pour chaque instant t, on dit que μ est *réversible* si sous Q_μ le processus $t \to X_{T-t}$ a même loi que $t \to X_t$, et on dit que μ est *d'énergie finie* si $f|\frac{\nabla\phi}{\phi}|^2 d\mu < +\infty$. Une application importante du résultat de densité des fonctions C^∞_c dans $H^1(\phi)$ est le résultat suivant :

Théorème 1 *Toute mesure stationnaire d'énergie finie est réversible.*

La démonstration repose sur un résultat de minimisation d'entropie de Cattiaux et Léonard [2] et sur le théorème de retournement du temps de Föllmer [3].

Pour finir, il est à noter que la plupart des résultats présentés ici dans le cas "Brownien + Drift" peuvent être étendus à des processus de matrice de diffusion quelconque (cf [5] ou [6]).

Bibliographie

[1] *P. Cattiaux , M. Fradon.* Entropy, reversible diffusion processes and Markov uniqueness. J. Funct. Anal. 138 (1) 243-272, 1996.

[2] *P. Cattiaux, C. Léonard.* Minimization of the Kullback information of diffusion processes. Ann. Inst. Henri Poincaré 30(1) : 83 − 132, 1994. and correction to appear in Ann. Inst. Henri Poincaré in 1995.

[3] *H. Föllmer.* Random fields and diffusion processes, Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour. Lect. Notes Math. 1362 :101-204, 1988.

[4] *M. Fukushima, Oshima, M. Takeda.* Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes. Number 19 in Studies in Mathematics. De Gruyter, Berlin New York, 1994.

[5] *M. Fradon.* Diffusions dégénérées, réfléchies ou à dérives singulières : étude des lois et des formes de dirichlet associées. PhD Thesis, 1995.

[6] *M. Fradon.* Entropy, reversible diffusion processes and Markov uniqueness : The case of a general diffusion matrix. Preprint, 1995.

[7] *M. Rockner : T. S. Zhang.* Uniqueness of generalized Schrödinger operators and applications. J. Funct. Anal. 105 :187-231, 1992.

[8] *M. Rockner*; *T. S. Zhang.* Uniqueness of generalized Schrödinger operators - Part II. J. Funct. Anal. 119 :455-467, 1994.

U.F.R. de Mathématiques, Bât. M2,
Université des Sciences et Technologies de Lille,
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex.
Fradon@alea.univ-lillel.fr