Modèles markoviens de ressources partagées.

Florence Forbes

Les systèmes de ressources partagées sont constitués d'agents et de ressources en quantité insuffisante. Les agents sont en compétition pour l'utilisation des ressources. Ce qui peut entraîner des conflits et des blocages entre eux. L'évaluation des performances de tels systèmes et la résolution des conflits de la manière la plus équitable possible sont d'une grande importance pratique. Les applications les plus courantes appartiennent au domaine de l'informatique. Elles concernent la gestion des bases de données, les réseaux de communications et le calcul parallèle. L'aléatoire s'insère naturellement dans ces modèles. Il permet de tenir compte des fluctuations sur les arrivées des demandes de ressources et sur les durées d'occupation de ces ressources par les agents. Mes travaux visent à proposer et étudier des modèles de ressources partagées markoviens où les agents sont représentés par des automates stochastiques à états finis et le partage des ressources traduit par des synchronisations entre ces automates. Le "processus des philosophes" est un exemple de tel modèle. Les automates ne peuvent y prendre que deux états 0 ou 1. Les synchronisations sont de type exclusion mutuelle, c'est-à- dire que deux automates voisins (sur le graphe représentant le système) ne peuvent être simultanément dans l'état 1. Ce processus a été introduit par B. Ycart [1] sur des graphes linéaires comme une version probabiliste du fameux "Dining Philosophers' Problem" de Dijkstra. L'étude presentée ici correspond à une extension aux cas de graphes dits échelles. Plus de détails pourront être trouvés dans [2]. Ce modele illustre des notions théoriques importantes telles que la réversibilité, la troncature de processus, l'existence d'un equilibre à forme produit, le calcul de fonctions de partition, les propriétés de Markov sur les graphes. Des extensions du modèle ont également été proposées dans [4].

Pour chaque agent les demandes de ressources arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ. Si les ressources demandées sont libres, l'agent devient actif et occupe les ressources pendant un temps exponentiel de paramètre μ que nous prendrons dans la suite égal à 1. Dans le cas contraire, l'agent reste passif. Deux agents vont donc pouvoir être actifs en même temps, s'ils utilisent des ressources différentes. Dans un tel modèle, le partage des ressources peut être représenté par un graphe dont les sommets représentent les agents. Deux agents sont reliés par une arête du graphe s'ils ne peuvent être actifs en même temps, autrement dit s'ils partagent au moins une ressource. A titre d'exemple, un réseau avec n liaisons (les agents) qui nécessite l'utilisation d'un même et unique bus, correspond au graphe à n sommets tous connectés (clique). Considérons donc un graphe $G = (S, E)$ où S est un ensemble de sommets et E un ensemble d'arêtes. Notons $\eta_t = (\eta_t(x),\ x \in S)$ la configuration du système à l'instant t, avec $\eta_t(x) = 1$ si l'agent x est actif et $\eta_t(x) = 0$ s'il est inactif. L'évolution du système dans le temps est décrite par un processus de Markov $(\eta_t)_{t\geq 0}$ à valeur dans l'espace $\mathcal{A}_G$ des configurations admissibles. Ces configurations sont les éléments de $\{0,\ 1\}^S$ qui n'ont pas de sommets voisins sur G à la valeur 1. Pour des graphes finis, il est facile de voir que le processus des philosophes est irréductible sur $\mathcal{A}_G$ et a une unique mesure stationnaire notée μ_G. Cette mesure a la propriété d'être réversible et d'admettre une forme produit :

$$\forall \eta \ \in \ \mathcal{A}_G \ , \ \mu_G[\ \eta\ ] \ = \ \mu_G\,[\ 0_G\ ] \cdot \lambda^{\sum_{x\in S}\eta(x)}, \tag{1}$$

où 0_G est la configuration où tous les philosophes sont inactifs. Le calcul de cette mesure se réduit donc à celui de la constante de normalisation $\mu_G[0_G]$ dont l'inverse est encore appelée fonction de partition et notée Z_G. Cette fonction de partition est un polynôme en λ. Le coefficient d'ordre k est le nombre de configurations admissibles ayant exactement k philosophes à 1. Déterminer μ_G est donc essentiellement un problème de combinatoire. Cependant la taille de l'espace $\mathcal{A}_G$ rend en général impossible une énumération directe même par ordinateur. Notre objectif est donc de montrer que pour une certaine classe de graphes que nous appelons échelles, la mesure réversible du processus des philosophes peut-être calculée en un temps polynômial. Les graphes échelles sont obtenus en faisant le produit cartésien d'un cycle, d'une ligne ou d'un arbre avec un sous-graphe fixé. Cette structure particulière permet de réduire le calcul de la mesure stationnaire à des produits de matrices. Les matrices impliquées sont l'analogue des matrices de transfert en mécanique statistique. D'autres parallèles avec cette discipline peuvent être faits. Certains paramètres de performance s'identifient à des paramètres thermodynamiques. Dans le cas du produit d'un arbre régulier infini avec une clique, il est également possible de mettre en évidence des phénomènes de transition de phase et de généraliser des résultats de Kelly [3].

Bibliographie

[1] *Ycart, B.*, The Philosophers Process : an ergodic reversible nearest particle system, Ann. Appl. Probab., vol. 3, no 2, p.356-363, (1993).

[2] *Forbes, F., Ycart, B.*, The Philosophers Process on ladder graphs, Rapport technique MAI-IMAG, Grenoble, no 7, (1994), à paraître dans *Communications in statistics : stochastic models.*

[3] *Kelly, F.P.*, Stochastic models of computer communication systems, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, no 85, p.379-395, (1988).

[4] *Forbes, F., François, O. et Ycart, B.*, Stochastic comparison for resource sharing processes, Rapport technique MAI-IMAG, Grenoble, no 22, (1996).

LMC-IMAG B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex,
Florence.Forbes@imag.fr