Automorphismes de $\check{U}_q(\mathcal{B}^+)$

Odile Fleury

La recherche des automorphismes de certaines algèbres n'est en géneral pas aisée. Le cas de l'espace affine A^n en est un exemple : seul le cas du plan a été traité entièrement dans [8] et déjà le cas $n = 3$ paraît présenter des automorphismes "sauvages" ([5]).

En ce qui concerne $U(\mathcal{G})$, algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, M.K.Smith a traité le cas de certaines algèbres de Lie résolubles ([7]).

Le passage à la quantification a d'ores et déjà permis la détermination des automorphismes de $U_q(sl(2))$ ([1]) alors que le cas $U(sl(2))$ reste encore complexe ([4]). Il semble, d'après cet exemple, que la quantification rigidifie les structures au point de réduire sensiblement le groupe d'automorphismes d'algèbre dans le passage du cas classique au cas quantique.

Dans [2] sont décrits les automorphismes d'algèbre de $U_q^+(sl(3))$. L'étude des automorphismes d'algèbre de $U_q^+(\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est semi-simple paraît difficile et c'est pourquoi nous avons étudié l'algèbre enveloppante quantifiée de la sous-algèbre borélienne $\mathcal{B}^+, U_q(\mathcal{B}^+)$, ou plutôt sa forme augmentée $\check{U}_q(\mathcal{B}^+)$.

La notation q désignera un élément non nul de $\mathbb{C}$, non racine de l'unité. Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie semi-simple de rang $n, (a_{ij})$ sa matrice de Cartan. Soient $d_1, \ldots, d_n$ les entiers naturels, premiers entre eux dans leur ensemble, tels que $(d_i a_{ij})$ soit symétrique.
Pour $k, j \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}^*$, posons :
$[k]_d = \frac{q^{dk} - q^{-dk}}{q^d - q^{-d}}$; $[k]_d! = [1]_d[2]_d \ldots [k]_d$; $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_d = [k]_d \ldots [k-j+1]_d/[j]_d!$
Alors $\check{U}_q(\mathcal{B}^+)$ est la $\mathbb{C}$ - algèbre engendrée par les éléments $\check{K}_i$ et $x_i (i = 1, \ldots, n)$ avec :

$$\check{K}_i x_j = q^{\delta_{ij} d_i} x_j \check{K}_i$$

et les relations de Serre quantiques :

$$\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{d_i} x_i^{1-a_{ij}-m} x_j x_i^m = 0, \quad \forall i \neq j = 1, \ldots, n.$$

On montre que $\check{U}_q(\mathcal{B}^+)$ est une algèbre de Hopf avec la structure donnée par :

$$\Delta x_i = x_i \otimes 1 + K_i \otimes x_i, \quad \Delta \check{K}_i = \check{K}_i \otimes \vec{K}_i,$$

$$S x_i = -K_i^{-1} x_i, \quad S\check{K}_i = \check{K}_i^{-1}, \quad \varepsilon(x_i) = 0, \quad \varepsilon\left(\check{K}_i\right) = 1.$$

On démontre alors le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit* $\theta \in Aut(\check{U}_q(\mathcal{B}^+)$. *Alors, pour tout* i,

$$\theta\left(\check{K}_i\right) = a_i \check{K}_{\sigma(i)} \quad \text{et} \quad \theta\left(x_i\right) = \gamma_i \check{K}_1^{b_{1i}} \ldots \check{K}_n^{b_{ni}} x_{\sigma(i)},$$

où $a_i, \gamma_i \in \mathbb{C}^\star, \sigma$ *est un automorphisme du graphe de Dynkin et* $(b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ *avec* $d_i b_{\sigma(i)j} = d_j b_{\sigma(j)i}$.

Le théorème obtenu aboutit à une structure simple du groupe des automorphismes d'algèbre. Il est en effet paramétré par le groupe (fini) Γ des automorphismes du graphe de Dynkin, par $(\mathbb{C}^\star)^{2n}$, et par un sous-groupe S de matrices vérifiant une identité les liant aux entiers d_i qui symétrisent la matrice de Cartan.
Plus précisément, on a :

Théorème 2

$$Aut\left(\check{U}_q\left(\mathcal{B}^+\right)\right) \simeq (\Gamma \propto \mathcal{S}) \propto \left((\mathbb{C}^\star)^{2n}\right.$$

où $\propto$ *deśigne le produit semi-direct, et* S *est le sous-groupe additif des matrices symétrisables par les entiers* d_i.

Enfin, comme corollaire, on obtient les automorphismes d'algèbre de Hopf de $\check{U}_q(B^+)$:
Proposition 1 *Soit* $\theta \in Aut_{Hopf}(\check{U}_q(\mathcal{B}^+))$. *Alors, pour tout* i,

$$\theta\left(\check{K}_i\right) = \check{K}_{\sigma(i)} \text{ et } \theta\left(x_i\right) = \gamma_i x_{\sigma(i)}$$

i.e.

$$Aut_{Hopf}\left(\check{U}_q\left(\mathcal{B}^+\right)\right) \simeq \Gamma \propto (\mathbb{C}^\star)^n$$

Bibliographie

[1] *J. Alev, M. Chamarie*, Dérivations et automorphismes de quelques algèbres quantiques, Communications in Algebra (1992) 20, 1787-1802.

[2] *J. Alev, F. Dumas*, Rigidité des plongements des quotients primitifs minimaux de $U_q(sl(2))$ dans l'algèbre quantique de Weyl-Hayashi, Prépublication de l'Université de Reims, Département de Mathématiques, 94.7.

[3] *P. Caldero*, Algèbres enveloppantes quantifiées : Action adjointe et représentations, Université de Paris VI, Thèse de Doctorat, 1993.

[4] *A. Joseph*, A wild automorphism of $U(sl(2))$, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., (1976), 80, 61-65.

[5] *M. Nagata*, On the automorphism group of k[X, Y], Kyoto Univ. Lectures in Math. 5, Kyoto University, Kinokuniya - Tokyo, 1972.

[6] *P. Polo*, Dynkin diagrams and enveloping algebras of semisimple Lie algebras, Prépublication.

[7] *M. K. Smith*, Automorphisms of Enveloping algebras, Communications in Algebra, Vol.**11**, No 16, 1983.

[8] *W. van der Kulk*, On polynomial rings in two variables, Nieuw Archief voor Wiskunde, **3** (1953), No. 1,33-41.

Université de Reims
Département de Mathématiques, U.R.A 1870
Moulin de la Housse. B.P. 1039
51687 REIMS Cedex 2
odile.fleury@univ-reims.fr