PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MARIE-AGNÈS EGRET

Proposition pour introduire des élèves de collège à l'activité de démonstration

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989-1990, fascicule 5
« Didactique des mathématiques », , exp. n° 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989-1990___5_A8_0>

Proposition pour introduire des élèves de collège à l'activité de démonstration

Marie-Agnès EGRET

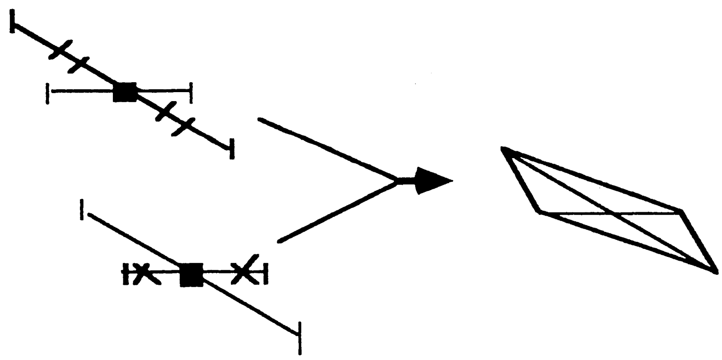
Pour faire entrer des élèves de collège dans ce qu'est une démarche déductive, il faut distinguer, dans l'enseignement, trois étapes qui ne sont pas de même durée mais qui ont chacune leur importance. Ces trois étapes ont été dégagées après une expérience menée il y a deux ans dans une classe de quatrième de 28 élèves. (R.Duval et M.- A. Egret).

<u>Première étape :</u>

A partir de la 6 ème, un travail en amont de la démonstration doit être mené. Il s'agit d'approfondir les acquis des élèves dans les domaines suivants : construction de figures, explorations des figures c'est-à-dire retrouver des analogies, dégager des conjectures , etc... (cf. IREM de Strasbourg) .

Définitions et propriétés sont bien sûr énoncées, mais des représentations (D. Guin) de ces règles doivent être proposées de telle sorte que les élèves puissent appréhender de manière opératoire les énoncés, c'est-à-dire distinguer les conditions d'application d'un théorème et son résultat.

exemple : Théorème (DIAGONALE 2) : Tout quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme .



Dans la classe de l'expérimentation, il s'est révélé nécessaire de faire prendre conscience aux élèves que les hypothèses n'étaient pas ce qu'on croyait vrai en regardant la figure. Dans les textes des élèves, à cette époque, on trouvait les explications suivantes :

FOL :" *XYZT n'est pas un parallélogramme : ... TX // XY mais TZ //`XY. Mais sans équerre, ni règle, ni compas, (bref sans vérifier si TZ // XY) alors XYZT est PEUT-ETRE un parallélogramme.*"

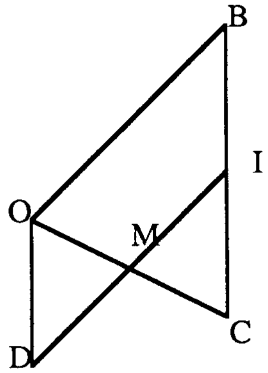
WEI :" *RSTU est un quadrilatère dont les côtés opposés sont presque parallèles...*"

<u>Deuxième étape :</u>

Dans cette étape de courte durée, il s'agit de provoquer une discussion dans la classe à propos de différents énoncés et de semer le doute parmi les élèves : comprennent-ils le sens des énoncés qu'ils écrivent ?

Nous avons proposé aux élèves de répondre à la question suivante qui avait été formulée par eux à la suite d'un exercice de construction :

Exercice 1:
O,B,C sont trois points non alignés.
I est le milieu de [BC] et D le point
tel que ODIB soit un parallélogramme.
Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le
milieu de [OC]?



Après un temps de recherche individuelle, une mise en commun des idées trouvées a été faite : il fut proposé de remarquer que OICD était un parallélogramme. Les élèves ayant rédigé au brouillon leur réponse, deux formulations d'élèves ont ensuite été sélectionnées et écrites au tableau :

Elève MB: *"OICD est un parallélogramme parce que ses diagonales [OC] et [ID] se coupent en leur milieu".*

Elève SM: *"Si M est le milieu de [ID] et si OICD est un parallélogramme alors M est le milieu de [OC] parce que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu".*

C'est alors qu' un conflit s'est produit entre la classe et l'enseignante : nous nous sommes heurtés à l'impossibilité de faire prendre conscience aux élèves de la différence de sens de ces deux phrases. Ceux-ci ne retenaient que la présence, dans le même ordre, des propositions et d'expressions semblables : "OICD est un parallélogramme", "parce que ...diagonales ...se coupent en leur milieu". Et c'est en vain que nous cherchions à attirer leur attention sur le "si " et à discuter de sa signification.

Pendant l'heure suivante, devant l'échec de toute explication, nous leur avons donné la consigne suivante : voici les deux phrases proposées au cours précédent et des énoncés dans des étiquettes (nous avions supprimé les connecteurs). Reliez ces étiquettes par des flèches pour que représentations et phrases aient la même signification. Ce fut la première rencontre avec une représentation par réseau.

La réaction des élèves fut alors étonnante : pour la première phrase, la moitié proposait un sens de flèche correct, les 2/3 de l'autre moitié se trompaient de sens, les autres proposaient de mettre une flèche dans les deux sens! Le conflit était alors à l'intérieur de la classe. Pour la deuxième phrase (plus complexe), aucun élève n'arriva à proposer un réseau correct et l'élève SM elle-même nous dit : " je me rends compte que je n'avais pas compris ce que j'avais écrit". Ce court travail a permis de faire prendre conscience aux élèves de la différence de sens entre ces deux phrases. Mais nous n'avons pas été plus loin dans l'explication des énoncés.

Dans l'expérience faite, ce sont les textes écrits par les élèves qui nous ont permis de franchir cette étape mais il semble facile de réitérer ce travail, soit en proposant les deux phrases, soit en extrayant d'un travail le même type de phrases.

<u>Troisième étape :</u>

Rappelons les principes de cette étape :

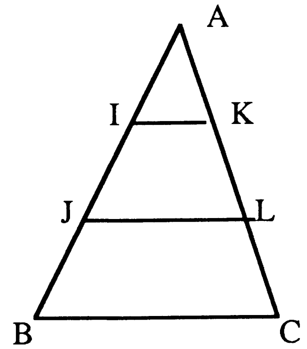
1) Séparer la phase heuristique de la phase d'organisation déductive.

Pour cela, les élèves travaillent par <u>groupe de 3 ou 4</u> pendant une vingtaine de minutes puis proposent un plan de solution (cela peut être : trouver une figure extraite ou rajouter une construction qui permet de trouver un ou des théorèmes à appliquer). L'enseignante répond aux demandes des groupes (c'est-à-dire qu'elle écoute les propositions des groupes et rappelle, soit le but fixé, soit les énoncés de départ ou propose des aides possibles ou encourage à persévérer dans une voie qui paraît intéressante).

Une mise en commun orale (la figure est dessinée au tableau) est alors faite et <u>tous</u> les élèves ont "une idée " de la solution à la fin de cette phase.

Exemple:

Exercice 7:
ABC est un triangle.
Sur [AB], on place les points I et J tels que: AI=IJ=JB.
Sur [AC], on place les points K et L tels que: AK=KL=LC.
Montrer que les droites (IK), (JL) et (BC) sont parallèles.



le résultat de la mise en commun a été: "tracer la droite BK et remarquer que le point d'intersection de cette droite et de JL est le milieu de BK. Se placer alors dans le triangle BKC"

Cette phase est sans doute la plus difficile : les élèves disposent de fiches de méthode (pour montrer qu'un point est le milieu...) construites en classe et enrichies au fur et à mesure de l'apprentissage et des exercices rencontrés.

Pendant l'expérience, il s'est révélé que le fait d'avoir compris ce qu'est l'organisation déductive changeait le sens du travail au cours de cette phase de recherche.

2) Proposer de construire un graphe propositionnel pour représenter la structure profonde de l'organisation déductive des énoncés.

Pour représenter une démonstration par un "réseau" (graphe propositionnel), nous donnons aux élèves, dès la construction du premier graphe, les consignes suivantes :

des conditions d'entrée partent une flèche; les définitions, théorèmes... sont des noeuds; il n'aboutit qu'une seule flèche à une conclusion; si elle n'est pas la conclusion finale, il doit repartir une flèche. Ces consignes simples permettent de comprendre le schéma ternaire de la substitution ; elles sont un moyen de contrôle efficace pour l'élève soi-même, entre les élèves et entre l'élève et l'enseignant.

Aucun réseau-type n'a été imposé (cf. p.8 deux exemples de réseau) : il n'y a ni ordre ni présentation obligatoires. Les élèves construisent <u>seuls</u> leur graphe . Tout réseau est accepté et l'enseignante propose individuellement des corrections (par exemple, elle signale que ce théorème demande deux conditions d'entrée et cependant il n'y a qu' une seule flèche qui y aboutit). Toutefois, les idées intéressantes trouvées par l'un ou l'autre élève pour améliorer la prise de conscience sont communiquées à la classe (par exemple, rajouter des couleurs pour différencier les différents statuts ou proposer d'autres statuts comme celui de "figures extraites" ou "ce que je vois", ce qui apparaît au bout de deux séances).

Après trois ou quatre séances (une par semaine), le réseau qui n'est qu'un outil, ne sera plus contrôlé par l'enseignant.

3) Rédiger, ce qui permet la prise de conscience de ce qu'est une démonstration.

Nous demandons aux élèves (après 2 ou 3 exercices) de proposer un texte qui n'est, en fait, que la description de leur graphe. En effet, l'organisation déductive porte sur des énoncés et non sur des contraintes de figures. Les élèves voient alors la figure à travers l'organisation du graphe.

A titre d'exemple , prenons deux textes proposés par un élève de la classe (considéré comme faible en français) :

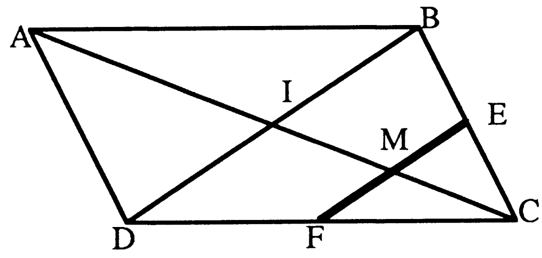
Solution proposée pour l'exercice 1 (cf. énoncé ci-avant) :

DO = IB	*DO // IB*
IB = CI	*CI // IB*
DO = CI	*DO // CI*
CD // IO	*CD = IO*

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu I. DOIC parallélogramme donc elles se coupent en leur milieu.

Solution proposée pour l'exercice 5 (on trouvera en annexe p. 10 le réseau accompagnant le texte de cet élève) :

Exercice 5:
ABCD est un parallélogramme.
I est le point d'intersection des diagonales, E est le milieu de [CB]et F celui de [CD].
Les droites (AC) et (EF) se coupent en M. Montrer que M est le milieu de [EF].



Il n'y a pas eu de mise en commun dans cet exercice cherché en temps limité.

LER : *Pour trouver qu'un point est le milieu de deux segments cela peut être les diagonales d'un parallélogramme. IL SUFFIT QUE JE PROUVE que IE // FC et IF // CE.*

Il suffit d'appliquer le théorème des milieux dans le triangle DBC. On sait que E est le milieu de BC MAIS IL NOUS FAUT UN AUTRE MILIEU . Ce sera I milieu de DB puisque I est l'intersection des diagonales d'un parallélogramme et qu'elles se coupent en leur milieu. Donc on peut appliquer le théorème des milieux. Dans le triangle DBC, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui passe par le milieu du côté opposé, cette droite est parallèle au troisième côté. JE SUIS SURE QUE IE // FC.

MAINTENANT JE FAIS le théorème des milieux pour que IF // EC. On sait que I est le milieu de DB (voir plus haut) dans le triangle DBC. On sait que F est le milieu de CD PUISQUE ILS NOUS LE DISENT. Alors la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui va au milieu du côté opposé, cette droite est parallèle au 3° côté. Donc maintenant je sais que IF // EC et IE // FC donc c'est un parallélogramme. Et puisque les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu alors M est le milieu de [EF].

Dans cette phase , il n'y a pas non plus de corrigé-type au tableau. Seuls quelques extraits différents sont lus.

Dans la classe de quatrième de l'expérience (ancien programme) une douzaine d'heures de cours ont été consacrées à l'apprentissage de la démonstration ; les 2/3 de la classe proposent alors des textes dans lesquels est sous-jacente la structure profonde de la démonstration : ces textes sont longs, rédigés de manière un peu lourde en un ou plusieurs paragraphes. Par la suite, une nette évolution dans les textes des élèves apparaît. Les attitudes propositionnelles nombreuses disparaissent peu à peu. Par exemple, une élève dont le cheminement est montré dans (M.-A. Egret et R. Duval) propose le texte suivant pour répondre à l'exercice7 dont l'énoncé se trouve plus avant :

LAM :*"Pour démontrer que IF est parallèle à JL, on se place dans le triangle AJL, on sait que K est le milieu de AL et que I est le milieu de AJ donc, par le théorème des milieux, on en conclut que IF est parallèle à JL.*

Pour démontrer que BC est parallèle à JL, on se place dans le triangle BIK, on sait que J est le milieu de BI et que IK est parallèle à JL alors la droite qui passe par J et qui est parallèle à IK coupe KB en son milieu X.

On se place dans le triangle BKC , L est le milieu de KC, X est le milieu de BK, par le théorème des milieux, XL est parallèle à BC.

IF et BC étant parallèles à JL, elles sont parallèles entre elles."

Les élèves, heureux d'avoir compris la règle du jeu de cette activité intellectuelle, trouvent un intérêt certain pour la géométrie et n'hésitent pas à dire que c'est facile!

REFERENCES

DUVAL R. & EGRET M.-A., 1989 : L'organisation déductive du discours, in Annales de didactique et de Sciences Cognitives, 2, IREM de STRASBOURG

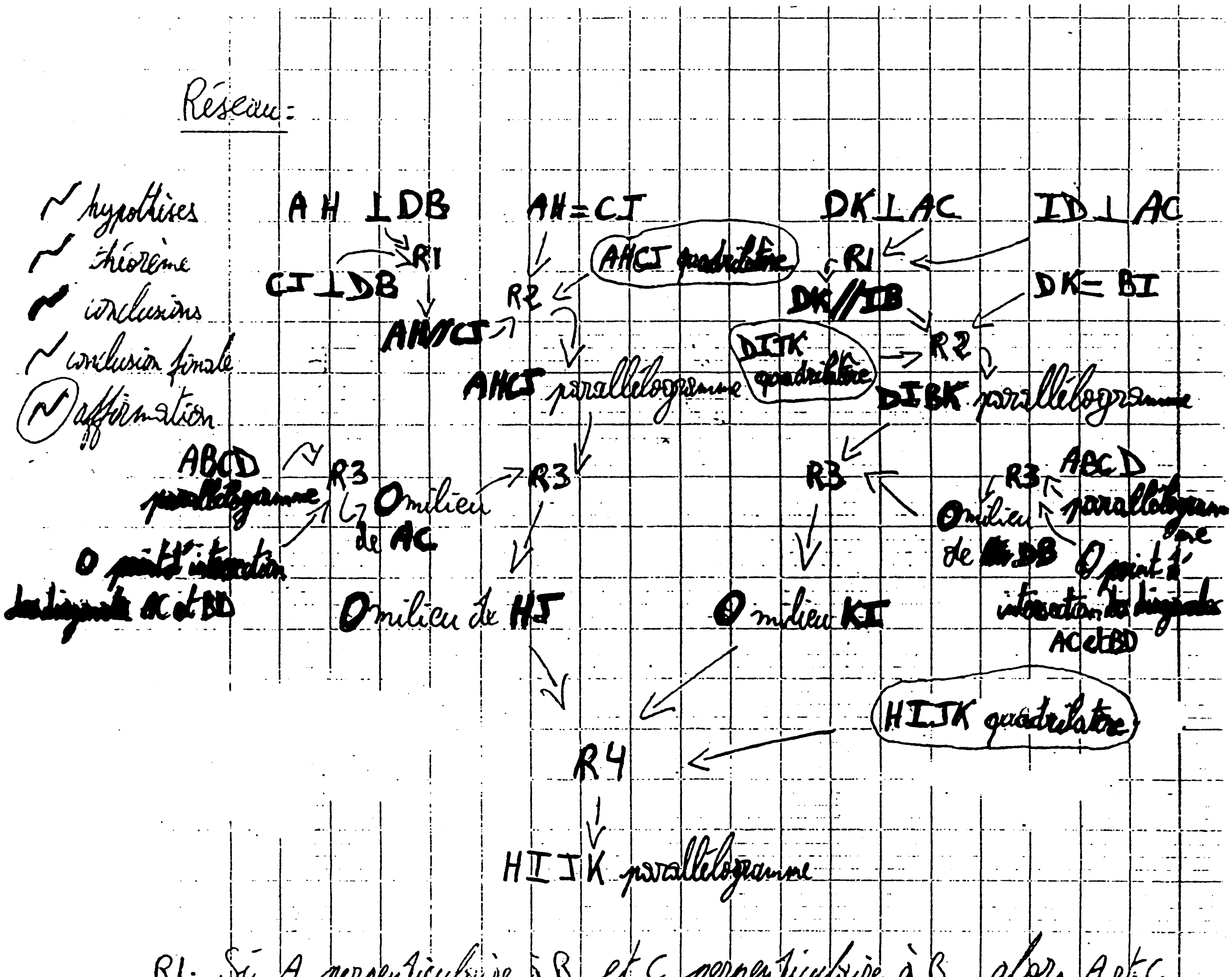
EGRET M.-A. & DUVAL R. , 1989 : Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, in Annales de didactique et de Sciences Cognitives, 2, IREM de STRASBOURG

GUIN D. (avec la collaboration du groupe IREM Intelligence Artificielle de Strasbourg), 1989 : Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration , in Annales de didactique et de Sciences Cognitives, 2, IREM de STRASBOURG

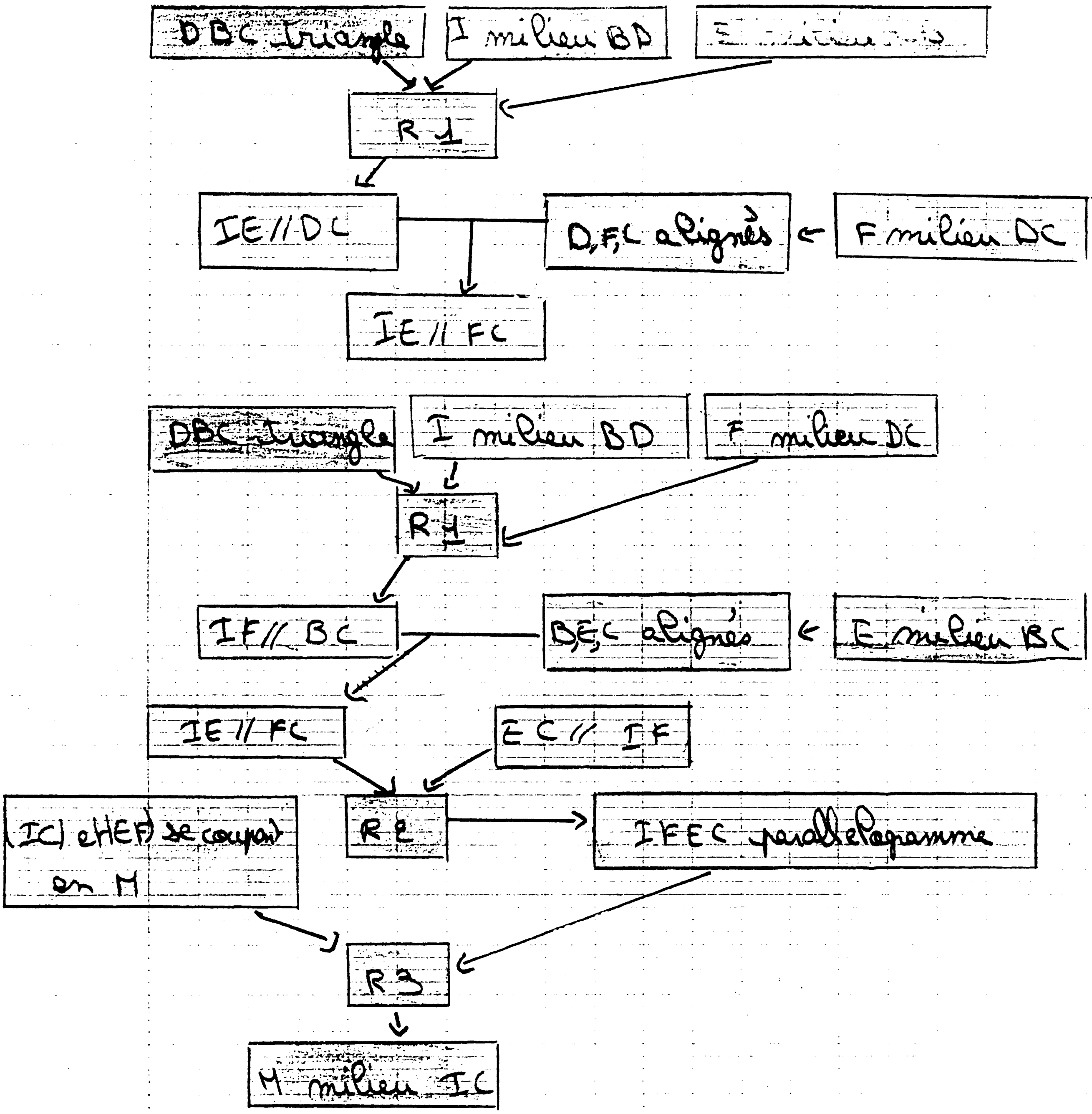
IREM de STRASBOURG, 1989 : Progression en géométrie de la 6ème à la 3 ème, in Suivi scientifique, classe de 3 ème, Bulletin Inter-Irem 1 er cycle

ANNEXE

Deux exemples de réseau :



R1 : Si A perpendiculaire à B, et C perpendiculaire à B, alors A et C sont parallèles.



R1 : La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au $3^{ème}$ côté

R2 : Si un quadrilatère à ses côtés opposés parallèles, c'est un parallélogramme.

R3 : Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu

Hypothèses règles conclusion

conclusions partielles figures vues sur le dessin

Réseau proposé par l'élève LER avec la rédaction de l'exercice 5 (p.6) :