

J. RAVEL

**Théorie axiomatique de l'essentialité**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1968, tome 5, fascicule 1  
, p. 73-82

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1968\\_\\_5\\_1\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1968__5_1_73_0)

© Université de Lyon, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Théorie axiomatique de l'essentialité

Par J. Ravel

Soit  $T$  un treillis complet, c'est à dire un ensemble ordonné (dont l'ordre sera noté  $\leq$ ) dans lequel toute famille  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $T$  a une borne inférieure, encore appelée intersection, et notée  $\bigwedge_{i \in I} x_i$  [et, par là même, une borne supérieure, encore appelée union et  $\bigvee_{i \in I} x_i$ ]

On appelle relation d'essentialité dans  $T$ , toute relation  $x \triangleleft y$  entre éléments de  $T$  telle que :

$$1) (\forall x \in T) \quad (x \triangleleft x) \quad [\text{réflexivité}]$$

2)  $(\forall x, y \in T) \quad (x \triangleleft y \Rightarrow x \leq y)$  [c'est à dire plus forte que l'ordre de  $T$ , et, en particulier telle que l'antisymétrie soit vérifiée, car si  $x \triangleleft y$  et  $y \triangleleft x$ , on a  $x \leq y$  et  $y \leq x$ , d'où  $x = y$ ].

3)  $(\forall x, y, z \in T) \quad (x \triangleleft y \text{ et } y \triangleleft z \Rightarrow x \triangleleft z)$   
 transitivité

4)  $(\forall x, y, z \in T) \quad [(x \leq y \leq z \text{ et } x \triangleleft z) \Rightarrow (x \triangleleft y \text{ et } y \triangleleft z)]$   
 [convexité de  $T$  pour l'essentialité.]

5) L'ensemble  $T$  est inductif pour l'ordre d'essentialité.

Si  $x, y \in T$  et si  $x \triangleleft y$ , on dit que  $x$  est essentiel dans  $y$ , ou que  $y$  est une extension essentielle de  $x$ .

Dans l'ensemble inductif  $T_{\triangleleft}$  qu'est l'ensemble  $T$  muni de l'ordre d'essentialité, tout élément  $x$  a au moins un majorant maximal (pour l'ordre de  $T$  aussi bien que pour l'ordre d'essentialité : en effet, si  $y$  est un  $\triangleleft$ -majorant de  $x$  maximal (pour l'essentialité, et si  $z \triangleright y$  est tel que

$x \triangleleft z$ , alors par convexité,  $y \triangleleft z$ , d'où  $z = y$  et la maximalité de  $y$  pour l'ordre de  $T$  ; si  $y$  est un  $\triangleleft$ -majorant de  $x$  maximal pour l'ordre de  $T$ , il l'est à fortiori pour l'ordre d'essentialité, qui entraîne l'ordre de  $T$ ).

On désigne par  $M(x)$  l'ensemble des extensions essentielles maximales de  $x$  (c'est à dire l'ensemble des majorants maximaux de  $x$  pour l'essentialité).

Théorème 1) : l'application  $x \rightarrow \omega(x) = \bigwedge_{y \in M(x)} y$  est la plus grande fermeture de l'ensemble inductif  $T_{\triangleleft}$ .

1) Extensivité : Si  $x \in T$ , soit  $y \in M(x)$  : on a  $x \leq \bigwedge_{y \in M(x)} y \leq y$ , d'où puisque  $x \triangleleft y$ , par convexité,  $x \triangleleft \bigwedge_{y \in M(x)} y = \omega(x)$

2) Croissance : Si  $x, y \in T$  et si  $x \triangleleft y$ , alors  $M(y) \subseteq M(x)$  (car si  $z \in M(y)$ , on a  $y \triangleleft z$ , d'où par transitivité  $x \triangleleft z$  ; et si  $z \triangleleft t$ , on a  $y \triangleleft t$ , par transitivité, d'où  $z = t$ , en raison de <sup>la</sup> maximalité de  $z$  : ainsi,  $z \in M(x)$  d'où  $\omega(x) = \bigwedge_{z \in M(x)} z \leq \bigwedge_{z \in M(y)} z = \omega(y)$ ).

Ainsi  $x \leq \omega(x) \leq \omega(y)$  : mais, puisque  $x \triangleleft y$  et que  $y \triangleleft \omega(y)$ , par extensivité, on a, par transitivité,  $x \triangleleft \omega(y)$ , d'où par convexité,  $\omega(x) \triangleleft \omega(y)$ .

3) Idempotence : Si  $x \in T$ , on a  $M(\omega(x)) = M(x)$ . En effet, puisque  $x \triangleleft \omega(x)$ , on a  $M(\omega(x)) \subseteq M(x)$  ; soit maintenant  $y \in M(x)$  : on a  $\omega(x) = \bigwedge_{y \in M(x)} y \leq y$ , d'où  $x \leq \omega(x) \leq y$ , et, puisque  $x \triangleleft y$ , par convexité,  $\omega(x) \triangleleft y$  ; si maintenant  $y \triangleleft z$ , on a  $x \triangleleft \omega(x) \triangleleft y \triangleleft z$  d'où par transitivité,  $x \triangleleft z$  ; vu la maximalité de  $y$  il s'ensuit que  $y = z$ ,

d'où le fait que  $y \in M(\omega(x))$ , ainsi  $M(x) \subseteq M(\omega(x))$ ,  
 d'où  $M(x) = M(\omega(x))$ ,

$\omega[\omega(x)] = \bigwedge_{y \in M(\omega(x))} y = \bigwedge_{y \in M(x)} y = \omega(x)$  et le  
 résultat.

Soit maintenant  $\varphi$  une fermeture de  $T_\Delta$  : si  $x \in T$ ,  
 soit  $y \in M(x)$  on a  $x \Delta y$ , d'où, en raison de la croissance  
 de  $\varphi$ ,  $\varphi(x) \Delta \varphi(y)$  mais puisque  $y \Delta \varphi(y)$ , en raison de  
 l'extensivité, on a compte tenu de la maximalité de  $y$ ,  
 $y \varphi(y) = y$ , d'où  $\varphi(x) \Delta y$ , et en particulier,  $\varphi(x) \leq y$ ,  
 ce  $(\forall y \in M(x))$  : ainsi  $\varphi(x) \leq \bigwedge_{y \in M(x)} y = \omega(x)$  ;  
 comme  $x \Delta \varphi(x)$ , vu l'extensivité de  $\varphi$ , on a  $x \leq \varphi(x) \leq \omega(x)$ ,  
 d'où, puisque  $x \Delta \omega(x)$ , par convexité  $\varphi(x) \Delta \omega(x)$ , ce  
 $(\forall x \in T)$  : ainsi  $\varphi \Delta \omega$  et le résultat est démontré.

On dit qu'un élément  $x$  de  $T$  est fermé dans  $T$  si  
 $x$  est la seule extension essentielle de  $x$  dans  $T$ , c'est à  
 dire si  $(\forall y \in T) (x \Delta y \Rightarrow x = y)$ .

Théorème 2 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) Tout élément  $x$  de  $T$  possède une plus grande extension essentielle dans  $T$  (qui est alors, par définition,  $\omega(x)$ ) et  $\omega$  est une fermeture dans  $T$ .
- 2) L'essentialité de  $T$  est compatible avec l'union (finie).
- 3) L'intersection de deux éléments de  $T$  fermés dans  $T$  est fermé dans  $T$ .

Remarquons que  $\omega$ , qui est idempotente, est, pour l'ordre de  $T$ , une application extensive [ car  $x \triangleleft \omega(x) \Rightarrow x \leq \omega(x)$ , ce  $(\forall x \in T)$  ] ; ainsi, pour que  $\omega$  soit une fermeture dans  $T$  pour l'ordre de  $T$ , et non plus seulement dans  $T \triangleleft$ , pour l'ordre d'essentialité, il faut et il suffit que  $\omega$  soit croissante pour l'ordre de  $T$ , c'est à dire que l'on ait  $(\forall x, y \in T) (x \leq y \Rightarrow \omega(x) \leq \omega(y))$ . Une condition équivalente est la suivante : soit  $I(\omega) = \{x \in T \mid \omega(x) = x\}$  l'ensemble des invariants de  $\omega$  ;  $\omega$  est une fermeture dans  $T$  si et seulement si  $I(\omega)$  est tel que  $(\forall x, y \in T) (\omega(x) \wedge \omega(y) \in I(\omega))$ .

- La condition est nécessaire : en effet, si  $\omega$  est une fermeture dans le treillis complet  $T$ , l'ensemble des invariants est un treillis complet dont l'intersection coïncide avec celle de  $T$ .

- La condition est suffisante : si elle est vérifiée, soient  $x, y \in T$  tels que  $x \leq y$  ; on a, puisque  $x \leq \omega(x)$  et  $y \leq \omega(y)$ ,  $x = x \wedge y \leq \omega(x) \wedge \omega(y) \leq \omega(x)$ , d'où, par convexité, puisque  $x \triangleleft \omega(x)$ ,  $x \triangleleft \omega(x) \wedge \omega(y)$ . Mais on sait que  $\omega(x)$  est le plus petit invariant de  $\omega$  majorant  $x$  (pour l'essentialité), d'où  $\omega(x) \leq \omega(x) \wedge \omega(y) \leq \omega(y)$ , et le résultat est démontré.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 2 :

1)  $\Rightarrow$  2) : Vu la commutativité de l'union, il suffit de prouver que  $(\forall x, y, z \in T) \quad (x \triangle y \Rightarrow x \vee z \triangle y \vee z)$  ; on a, vu 1), et puisque  $x \triangle y, y \leq \omega(x)$  ;  $\omega$  étant une fermeture dans  $T$ ,  $x \leq x \vee z \Rightarrow \omega(x) \leq \omega(x \vee z)$ , d'où  $y \leq \omega(x \vee z)$  ; mais  $z \leq x \vee z \leq \omega(x \vee z)$ , d'où  $y \vee z \leq \omega(x \vee z)$ , soit  $x \vee z \leq y \vee z \leq \omega(x \vee z)$ . Mais, vu l'extensivité de  $\omega$ ,  $x \vee z \triangle \omega(x \vee z)$ , d'où par convexité,  $x \vee z \triangle y \vee z$ .

2)  $\Rightarrow$  3) : Soient  $x$  et  $y$  des éléments de  $T$  fermés dans  $T$  : si  $x \wedge y \triangle z$ , on a, vu 2),  $x = x \vee (x \wedge y) \triangle x \vee z$ , d'où  $x \vee z = x$  et  $z \leq x$ , de même  $z \leq y$ , d'où  $z \leq x \wedge y$  et  $z = x \wedge y$  ; ainsi  $x \wedge y$  est fermé dans  $T$ , le résultat est démontré.

3)  $\Rightarrow$  1) : Si  $x \in T$ , les extensions essentielles maximales de  $x$  sont fermées dans  $T$  : ainsi si  $y, z \in M(x)$ ,  $y \wedge z$  est fermé dans  $T$ , mais  $x \leq y \wedge z \leq y$  et  $x \triangle y$ , d'où par convexité  $y \wedge z \triangle y$ , d'où  $y \wedge z = y$  et  $y \leq z$  ; de même  $z \leq y$  et  $z = y$  est l'unique extension essentielle maximale de  $x$ , donc la plus grande extension essentielle de  $x$ , vu l'inductivité de l'ensemble des majorants de  $x$  pour l'essentialité.

Tout élément  $x$  de  $T$  a donc une plus grande extension essentielle  $\omega(x)$  ; il s'ensuit que les invariants de  $\omega$  sont précisément les éléments de  $T$  fermés dans  $T$ , d'où le fait que  $\omega$  est une fermeture dans  $T$ , compte tenu de la condition suffisante d'une équivalence précédente.

Les conditions précédentes sont aussi équivalentes à la suivante :

1) Toute intersection d'une famille quelconque d'éléments de  $T$  fermés dans  $T$  est fermée dans  $T$ .

En effet, 4)  $\implies$  3), et, si on a 3),  $\omega$  est une fermeture dans le treillis complet  $T$ , et 4) est bien vérifiée.

Remarque : L'union dans  $T_{\Delta}$ , quand elle existe, coïncide avec

l'union dans  $T$  ; si  $\bigcup_{i \in I} x_i = \sup_{i \in I} x_i$ , on a  $(\forall i \in I) (x_i \triangle \bigcup_{i \in I} x_i)$ , d'où  $(\forall i \in I) (x_i \leq \bigcup_{i \in I} x_i)$  et  $\bigvee_{i \in I} x_i \leq \bigcup_{i \in I} x_i$ . Soit  $j \in I$ , : on a  $x_j \leq \bigvee_{i \in I} x_i \leq \bigcup_{i \in I} x_i$  et  $x_j \triangle \bigcup_{i \in I} x_i$ , d'où, par convexité,  $\bigvee_{i \in I} x_i \triangle \bigcup_{i \in I} x_i$  et  $(\forall j \in I) (x_j \triangle \bigvee_{i \in I} x_i)$  : ainsi  $\bigvee_{i \in I} x_i = \bigcup_{i \in I} x_i$  et le résultat est démontré .

La relation d'essentialité habituelle dans le treillis  $T$  des sous-modules d'un module constitue un premier exemple de relation d'essentialité. Le fait que le treillis  $T$  est modulaire, l'existence pour chaque élément de complément, entraînent des propriétés supplémentaires qui ont été données en (4) (chapitre II).

Nous fournissons dans la suite deux autres exemples de relations d'essentialité.

Théorème 3 : Soit  $T$  un treillis complet intercontinu [c'est à dire tel qu'on ait, pour toute famille totalement ordonnée  $(x_i)_{i \in I}$  d'élément de  $T$  - donc telle que  $(\forall i, j \in I) (x_i \leq x_j \text{ ou } x_j \leq x_i)$  - et pour tout élément de  $T$ ,  $x \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} (x \wedge x_i)$ ]

Si  $F$  est une partie quelconque de  $T$ , la relation  $x \triangle_F y$  [ $x \leq y$  et  $(\forall z \in F) (x \wedge z = 0 \implies y \wedge z = 0)$ ] est une relation d'essentialité dans  $T$  (Nous désignons par 0 le plus petit élément de  $T$ ).

Démonstration :

$$1) \quad (\forall x \in T) \quad [x \leq x \text{ et } (\forall z \in F) (x \wedge z = 0 \Rightarrow x \triangleleft_F z)]$$

d'où la reflexivité de  $\triangleleft_F$ .

2)  $\triangleleft_F$  est par définition même plus forte que l'ordre de T.

3) Si  $x \triangleleft_F y$  et  $y \triangleleft_F z$ , on a  $x \leq y$  et  $y \leq z$ , d'où  $x \leq z$ ; et si  $t \in F$  est tel que  $x \wedge t = 0$ , alors, puisque  $x \triangleleft_F y$ ,  $y \wedge t = 0$ , d'où; puisque  $y \triangleleft_F z$ ,  $z \wedge t = 0$ : ainsi,  $x \triangleleft_F z$ , et  $\triangleleft_F$  est transitive.

4) Si  $x \leq y \leq z$  et  $x \triangleleft_F z$ , montrons que  $x \triangleleft_F y$  et que  $y \triangleleft_F z$ : en effet, si  $t \in F$  est tel que  $x \wedge t = 0$ , on a aussi  $z \wedge t = 0$ , d'où, puisque  $x \wedge t \leq y \wedge t \leq z \wedge t$ ,  $y \wedge t = 0$  et  $x \triangleleft_F y$ ; si  $t \in F$  est tel que  $y \wedge t = 0$ , on a, puisque  $0 \leq x \wedge t \leq y \wedge t$ ,  $x \wedge t = 0$ , d'où aussi  $z \wedge t = 0$ : ainsi,  $y \triangleleft_F z$ , et la convexité de  $\triangleleft_F$  est démontrée.

5) Soit  $(y_i)_{i \in I}$  une famille totalement ordonnée pour  $\triangleleft_F$  d'éléments de T  $[(\forall i, j \in I) (y_i \triangleleft_F y_j \text{ ou } y_j \triangleleft_F y_i)]$   
On a  $y = \bigvee_{i \in I} y_i = \sup_{i \in I} \triangleleft_F y_i$ . En effet :

1) Si  $i \in I$ , montrons que  $y_i \triangleleft_F y$ : on a  $y_i \leq y$ ; soit maintenant  $z \in F$  tel que  $y_i \wedge z = 0$ .

Si  $j \in I$ , ou bien  $y_i \triangleleft_F y_j$ , on a alors  $y_j \wedge z = 0$ , ou bien  $y_j \triangleleft_F y_i$ , et alors  $y_j \leq y_i$  et  $0 \leq y_j \wedge z \leq y_i \wedge z = 0$  entraîne  $y_j \wedge z = 0$ ; Ainsi  $(\forall j \in I) (y_j \wedge z = 0)$ , d'où  $y \wedge z = (\bigvee_{j \in I} y_j) \wedge z = \bigvee_{j \in I} (y_j \wedge z) = 0$  et  $y_i \triangleleft_F z$ .

2) Soit  $x \in T$  tel que  $(\forall i \in I) (y_i \triangleleft_F z)$ : on a, en particulier  $(\forall i \in I) (y_i \leq z)$ , d'où  $y \leq z$ ; Ainsi si  $i_0 \in I$ , on a  $y_{i_0} \leq y \leq z$  et  $y_{i_0} \triangleleft_F z$ , d'où  $y \triangleleft_F z$  et le fait que y est bien le plus petit  $\triangleleft_F$  majorant des  $y_i$ .





La relation  $N \underset{\mathfrak{F}}{\triangleleft} N'$  est une relation d'essentialité dans le treillis des sous-modules d'un module  $M$ . On peut, comme en (1), introduire la notion de  $\mathfrak{F}$ -injectivité en disant qu'un module  $Q$  est  $\mathfrak{F}$  injectif si  $(\forall N \underset{\mathfrak{F}}{\triangleleft} M) (\forall f: N \rightarrow Q) (\exists g: M \rightarrow Q)$  ( $g$  prolonge  $f$ ), et montrer que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que :

$$(\forall I \underset{\mathfrak{F}}{\triangleleft} A) (\forall f: I \rightarrow Q) (\exists q \in Q) (\forall \lambda \in I) (\varphi(\lambda) = \lambda q).$$

Pour un module  $Q$ , on peut alors montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $Q$  est une extension  $\mathfrak{F}$ -essentielle maximale de  $M$
- 2)  $Q$  est une extension  $\mathfrak{F}$ -injective minimale de  $M$
- 3)  $Q$  est une extension  $\mathfrak{F}$ -injective minimale de  $M$

Si elles sont vérifiées, on dit que  $Q$  est une enveloppe  $\mathfrak{F}$ -injective de  $M$  il y a existence et unicité (au sens usuel) de l'enveloppe  $\mathfrak{F}$ -injective d'un module donné.

La  $\Sigma$  essentialité définie par une famille  $\Sigma$  de Sandersson est un cas particulier de  $\mathfrak{F}$ -essentialité [comme on le voit en prenant pour  $\mathfrak{F}$  la famille des idéaux de  $A$  appartenant à  $\Sigma$  et essentiels dans  $A$ .]

La théorie précédente (voir notre théorème 2) redonne alors des résultats obtenus par G. Maury (3) paragraphe 5 proposition 13) .

## BIBLIOGRAPHIE

-----

- (1) D. E. Sanderson : A généralisation of divisibility and Injectivity in modules.  
Canadian mathematical Bulletin 8 (1965) p. 505 - 513.
- (2) Tsai Che Té : Report on injective modules  
Queen 's University, Kingston, Ontario (1965)
- (3) Guy Maury :  $\Sigma$ -compléments  
(Note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris  
22 janvier 1968).
- (4) Ravel J. : Injectivité, Généralisation, Relations d'essentialité dans un treillis de Johnson. Thèse de spécialité,  
Faculté des Sciences de Lyon 1966, voir aussi Publication  
départements de Mathématiques, Faculté des Sciences de  
Lyon, 1967 , tome , fascicule .