Certificat de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 28-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__28_1>

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL [1].

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soient $a(u, v)$, $b(u, v)$, $c(u, v)$ trois fonctions de u et v possédant des dérivées premières continues. On pose :*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \int \left[\frac{a}{2}(1 - u^2 + v^2) - buv\right] du + \left[\frac{b}{2}(1 - u^2 + v^2) - cuv\right] dv, \\ y &= \int \left[\frac{b}{2}(1 + u^2 - v^2) - auv\right] du + \left[\frac{c}{2}(1 + u^2 - v^2) - buv\right] dv, \\ z &= \int (au + bv)\, du + (bu + cv)\, dv, \end{aligned}\right.$$

[1] Ceux des énoncés de certificat, qui sont insérés *sans être résolus*, sont proposés à nos lecteurs dont nous publierons ultérieurement les meilleurs solutions. Ces énoncés seront désignés par un numéro d'ordre précédé de la lettre C.

les intégrales étant prises le long d'une courbe C *quelconque reliant les points* (u_0, v_0), *origine, et* (u, v), *extrémité.*

1° *Pour que les valeurs de ces intégrales soient indépendantes du choix de la courbe* C, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\partial b}{\partial u} = -\frac{a+c}{\lambda}v, \qquad \frac{\partial c}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v} = -\frac{a+c}{\lambda}u, \tag{2}$$

λ *étant une fonction de* u *et* v *que l'on calculera.*

Désormais, on supposera les conditions (2) *réalisées.*

2° *Pour* $b^2 \neq ac$, *les formules* (1) *définissent alors les coordonnées (rectangulaires) d'une surface* S. *Calculer pour cette surface les cosinus directeurs de la normale et les deux formes quadratiques fondamentales.*

3° *Déterminer* S *dans l'hypothèse* $b = 0$, $c = a$.

II. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$p^2 - 2qx^2 = 0. \tag{E}$$

1° *Déterminer les courbes et les développables caractéristiques. Quelle est leur nature géométrique?*

2° *Déterminer sur chaque surface intégrale les courbes conjuguées des courbes caractéristiques. Pouvait-on prévoir le résultat géométriquement?*

3° *Trouver les surfaces intégrales de* (E), *passant par l'hyperbole* $8yz + 1 = 0$, $x - 1 = 0$.

Indications sur la solution. — I. 1° $\lambda = \dfrac{1 + u^2 + v^2}{2}$.

2° $\alpha : \beta : \gamma : 1 = u : v : \dfrac{u^2 + v^2 - 1}{2} : \lambda$.

$$ds^2 = \lambda^2[(a\,du + b\,dv)^2 + (b\,du + c\,dv)^2].$$

$$\begin{aligned} \mathrm{S}\,d\alpha\,dx &= \frac{1}{\lambda}[du(dx + u\,dz) + dv(dy + v\,dz)] \\ &= a\,du^2 + 2b\,du\,dv + c\,dv^2. \end{aligned}$$

3° $a = \dfrac{\mathrm{R}}{\lambda^2}$; S est une sphère de rayon R.

(*Voir* aussi Rainich, *C. R.*, 1925, 1er semestre.)

II. 1° et 2° Les multiplicités caractéristiques sont définies par les équations

$$y = -\frac{x^2}{2a} + b, \qquad z = \frac{ax^2}{4} + c, \qquad p = ax, \qquad q = \frac{a^2}{2}.$$

Les courbes caractéristiques sont des paraboles dont les plans sont parallèles à Ox et dont les axes sont parallèles au plan yOz ; les développables caractéristiques sont des cylindres paraboliques dont les génératrices sont parallèles au plan yOz. Il en résulte que les courbes conjuguées des courbes caractéristiques sont dans des plans parallèles au plan yOz.

3° On trouve les deux surfaces

$$x^4 + 8yz = 0, \qquad (x^2 - 2)^2 + 8yz = 0.$$

Épreuve pratique. — *Calculer, de préférence par la théorie des résidus, l'intégrale*

$$I = \int_0^1 \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{a^2 - x^2}\,dx,$$

où a est une constante réelle supérieure à 1. Quelle est la partie principale du résultat pour $a = \infty$? Pouvait-on la trouver sans avoir calculé I ? *Application ; $a = 1{,}25$.*

Indications sur la solution. — On fend le plan z suivant la droite $(-1, +1)$ et dorénavant $\sqrt{1-z^2}$ désignera une branche de fonction uniforme dans le plan coupé, égale à $+1$ à l'origine, au bord inférieur de la coupure. Si $\mathcal{L}$ est un chemin fermé tournant autour de la coupure dans le sens direct, on a

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{z^2\sqrt{1-z^2}}{a^2 - z^2}\,dz = 4I = -2\pi i(R_a + R_{-a} + R_\infty),$$

R_c désignant le résidu en c de la fonction à intégrer. On trouve (avec $a > 0$)

$$R_a = -\frac{ia}{2}\sqrt{a^2-1} = R_{-a}, \qquad R_\infty = i\frac{2a^2-1}{2},$$

le dernier radical étant positif. On en déduit

$$I = \frac{\pi}{4}\left(a - \sqrt{a^2-1}\right)^2.$$

Application $I = \frac{\pi}{16}$. — La partie principale cherchée $= \frac{\pi}{16a^2}$.

[Élémentairement, on calcule commodément l'intégrale, en décomposant $\frac{x^2(1-x^2)}{a^2-x^2}$ suivant ses éléments simples, en posant ensuite $x = \cos\varphi$ et en remarquant que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1-\frac{1}{a}\cos\varphi} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+\frac{1}{a}\cos\varphi} = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1-\frac{1}{a}\cos\varphi} = \frac{\pi a}{\sqrt{a^2-1}} \quad (a > 0) \Bigg].$$

(Poitiers, juin 1925.)

C.1. — ÉPREUVE THÉORIQUE [1]. — 1° *On considère la fonction*

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{xt-t^3}\,dt.$$

Montrer qu'elle est développable en série de puissances de x, et donner l'expression des coefficients, à l'aide de la fonction gamma.

2° *Soit*

$$z = x e^{\frac{i\pi}{3}},$$

où x est réel. En calculant l'intégrale

$$\int e^{wz-w^3}\,dw$$

étendue à un contour convenable du plan de la variable

$$w = t + iu \qquad (t,\ u \text{ réels}),$$

développer en série de puissances de x les fonctions

$$\int_0^{\infty} \cos(\rho x - \rho^3)\,d\rho, \qquad \int_0^{\infty} \sin(\rho x - \rho^3)\,d\rho.$$

C.2. — ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Calculer* $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ *à 0,001 près.*

2° *Trouver la relation entre l'intégrale précédente et l'intégrale* $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ *prise le long d'un chemin complexe coupant l'axe des quantités imaginaires en un point et un seul, l'ordonnée de ce point étant supérieure à* UN.

Nota. — *La méthode à suivre pour la première partie est laissée au choix des candidats. On pourra s'aider du changement de variables* $1 - x^4 = t$.

(Clermont-Ferrand, juin 1925.)

[1] Les énoncés de licence insérés sans solution (et qui seront affectés, désormais, d'un numéro d'ordre précédé de la lettre C) sont proposés à nos lecteurs. Nous publierons, comme pour les autres *Questions*, les meilleures solutions reçues.