NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificat de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 287-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__287_1>

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Construire la courbe*

$$x = \mathrm{L}\,\mathrm{tang}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi, \qquad y = \sin\varphi.$$

Interprétation géométrique du paramètre φ. *Longueur du segment* MT *de la tangente compris entre* M *point de contact et* T *point d'intersection avec* Ox. *Arc de la courbe* $\left(\textit{prendre } s = 0 \textit{ pour } \varphi = \frac{\pi}{2} \textit{ et } \frac{ds}{d\varphi} > 0\right)$. *Équation paramétrique des développantes de cette courbe au moyen de* φ.

2° *On se propose de déterminer une courbe telle que le segment compris entre le centre de courbure et le pied sur* Ox *de la normale soit constant et égal à* 1. *Expliquer* sans calcul *comment la première partie conduit à la solution de cette question et expliquer le rôle des deux constantes arbitraires.*

3° *Mettre en équation la question proposée au n° 2°. Prendre* $y'^2 = z$ *pour nouvelle inconnue et former l'équation différentielle liant* y *et* z : *l'intégrer.*

4° *Soit l'équation différentielle* (λ *constante*)

$$y = \frac{\mathrm{L}(1 + y'^2)}{2\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

où L *est le symbole des logarithmes népériens et* $y' = \frac{dy}{dx}$. *On pose* $y' = -\cot\varphi$ *et* $\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{\sin\varphi}$. *Former l'équation différentielle qui lie* x *à* φ; *l'intégrer.*

Indications sur la solution. — 1° La courbe donnée est une *tractrice;* le segment MT vaut 1; φ désigne l'angle de cette tangente MT avec Ox. L'arc s vaut L(sin φ). Les équations paramétriques des développantes sont

$$(1)\quad \begin{cases} x = \mathrm{L}\tang\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi + (\mathrm{C} - \mathrm{L}\sin\varphi)\cos\varphi. \\ y = \sin\varphi + (\mathrm{C} - \mathrm{L}\sin\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

2° Les courbes cherchées sont ces développantes à une translation près, le long de Ox.

3° Leur équation différentielle ne contient que y et y'; une première intégration conduit à l'équation indiquée au n° 4°.

4° Le changement de variable indiqué permet de retrouver les équations (1) à une constante additive près pour x.

Épreuve pratique. — 1° *On considère le cercle* (C) $x^2+y^2=1$. *On pose* $x+iy=z$, $Z=\sqrt{z}=X+iY$. *Indiquer le position du point* Z *correspondant à un point* z *pris sur* C; *on prend pour* ($x=1$, $y=0$), $X=1$, $Y=0$ *et le point* m (x, y) *parcourt le cercle* C *dans le sens direct une fois à partir de* $x=1$, $y=0$; *quel chemin a parcouru le point* M(X, Y)?

2° *Soit* φ *l'argument de* M : *on projette* M *sur* Om *en* μ; *trouver, en fonction de* φ, *les coordonnées de* μ. *Évaluer l'aire balayée par* Oμ *quand* m *parcourt la demi-circonférence supérieure* C; *construire la courbe lieu de* μ.

3° *Calculer avec approximation par défaut et excès l'arc décrit par* μ *quand* m *parcourt la demi circonférence supérieure. Partager l'intervalle d'intégration en six parties égales.*

Indications sur la solution. — 1° Le point M est le milieu de l'arc am, a désignant le point $z=1$. Le point μ décrit la courbe

$$\rho = \cos\frac{\theta}{2}.$$

L'aire demandée vaut $\frac{\pi}{4}$.

(Lille, novembre 1925.)