NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BERTRAND GAMBIER

Asymptotiques d'une surface. Formules de Lelieuvre

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__1_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

ASYMPTOTIQUES D'UNE SURFACE. FORMULES DE LELIEUVRE ;

PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. M. Lelieuvre a donné des formules, devenues classiques, pour les surfaces rapportées à leurs asymptotiques

$$
(\mathrm{L}) \quad \begin{cases} x = \displaystyle\int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u}\right) du - \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial v}\right) dv, \\ y = \displaystyle\int \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial u}\right) du - \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial v}\right) dv, \\ z = \displaystyle\int \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial u}\right) du - \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial v}\right) dv, \end{cases}
$$

les trois fonctions $\theta_1(u, v)$, $\theta_2(u, v)$, $\theta_3(u, v)$ étant solutions d'une même équation du second ordre

$$
(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = k(u, v)\, \theta,
$$

où k est une fonction quelconque de u, v.

On peut rattacher ces formules à la propriété caractéristique :

Tout le long d'une asymptotique, la droite MM' *joignant deux points infiniment voisins est aussi la droite commune aux plans tangents infiniment voisins en* M *et* M'.

Cette définition, de caractère nettement dualistique, doit être confrontée avec les coordonnées plückériennes de la droite, dont le caractère est aussi dualistique, car on les obtient aussi bien en donnant deux points de la droite qu'en donnant deux plans la contenant : la comparaison conduit aussitôt aux formules (L) et aux formules analogues pour les coordonnées tangentielles de la surface.

Si nous prenons des coordonnées homogènes (par rapport à un tétraèdre de référence quelconque), les coordonnées homogènes (x, y, z, t) d'un point d'une courbe sont fonctions de u; le point infiniment voisin est défini, *par exemple*, par

$$(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt);$$

un point de la tangente peut donc s'obtenir, *par exemple*, en retranchant les coordonnées homologues et divisant par du; on a ainsi le point

$$\left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}, \frac{dt}{du}\right)$$

associé au point (x, y, z, t) pour définir la tangente. Cela posé, sur une surface S, considérons les coordonnées-points (x, y, z, t) et les coordonnées-plans (ξ, η, ζ, τ) toutes fonctions de u, v. D'après ce qui précède, la tangente à la courbe $v =$ const. est définie par les deux points

$$(2) \qquad \begin{Vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} \\ x & y & z & t \end{Vmatrix}$$

et la tangente conjuguée par les deux plans

$$(3) \qquad \begin{Vmatrix} \xi & \eta & \zeta & \tau \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} & \frac{\partial \tau}{\partial u} \end{Vmatrix}$$

Si les courbes $v =$ const. sont asymptotiques, ces droites coïncident.

2. Rappelons quelques résultats simples de la géométrie réglée; prenons provisoirement des notations plus commodes pour notre but. Soit une droite définie par deux points

$$(4) \qquad \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{Vmatrix}$$

et

(5) $$p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

On a

$$p_{ii} = 0, \quad p_{ik} + p_{ki} = 0.$$

D'habitude, on ne considère que les six quantités

(6) $$p_{14}, \quad p_{24}, \quad p_{34}, \quad p_{23}, \quad p_{31}, \quad p_{12}$$

liées par la relation

(7) $$p_{14} p_{23} + p_{24} p_{31} + p_{34} p_{12} = 0.$$

A tout système de six nombres (6), définis à un facteur arbitraire près de proportionnalité et vérifiant (7), correspond une droite et une seule. L'interprétation géométrique des p_{ik} est aisée et démontre d'ailleurs l'affirmation qui précède, car

$$(\lambda x_1 + \mu y_1, \ \lambda x_2 + \mu y_2, \ \lambda x_3 + \mu y_3, \ \lambda x_4 + \mu y_4)$$

sont les coordonnées d'un point de la droite; or, pour $\lambda = y_4$, $\mu = -x_4$. on obtient le point $(p_{14}, p_{24}, p_{34}, 0)$, de sorte que (p_{14}, p_{24}, p_{34}) sont, dans le plan $x_4 = 0$, les coordonnées homogènes de la trace de la droite sur ce plan.

Si l'on prend les traces sur les plans x_2, x_3, x_4, on trouve

(8) $$\left\| \begin{matrix} p_{12} & 0 & p_{32} & p_{42} \\ p_{13} & p_{23} & 0 & p_{43} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & 0 \end{matrix} \right\|$$

et en vertu de (7) on aperçoit aussitôt que, multipliant chaque ligne de (8) respectivement par p_{34}, p_{42}, p_{23} et ajoutant, on trouve zéro dans chaque colonne, ce qui démontre bien que les trois (et par suite quatre) traces sont sur une même droite. Multiplier les x par une même constante, ou les y, ou remplacer deux points par deux autres sur la même droite, ne fait que multiplier les p_{ik} par un même facteur.

Définissons maintenant la droite par deux plans

(9) $$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \right\|.$$

La trace sur le plan $x_4 = 0$ est définie par le système

$$x_4 = 0, \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0. \qquad v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0,$$

de sorte que si l'on pose

$$q_{ik} = u_i v_k - u_k v_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{10}$$

on voit que $(q_{23}, q_{31}, q_{12}, 0)$ sont les coordonnées homogènes de cette trace. Mais alors les six quantités homogènes

$$q_{14}, \quad q_{24}, \quad q_{34}, \quad q_{23}, \quad q_{31}, \quad q_{12} \tag{11}$$

peuvent servir aussi de coordonnées plückériennes à la droite et l'on a

$$\frac{q_{23}}{p_{14}} = \frac{q_{31}}{p_{24}} = \frac{q_{12}}{p_{34}} = \frac{q_{14}}{p_{23}} = \frac{q_{24}}{p_{31}} = \frac{q_{34}}{p_{12}}. \tag{12}$$

On a les *mêmes* coordonnées, dans un *autre* ordre [1]. Cette remarque conduit aux formules de Lelieuvre.

3. Les courbes v = const. étant asymptotiques, les coordonnées plückériennes de la tangente à une telle courbe s'obtiennent au moyen des tableaux (2), (3) indifféremment. Si l'on multiplie x, y, z, t par une même expression (fonction ou non de u, v), on ne change pas la surface, mais on multiplie les p_{ik} par le carré de cette expression. On peut donc, sans restreindre, supposer les identités

$$\left\{\begin{aligned} t\frac{\partial x}{\partial u} - x\frac{\partial t}{\partial u} &\equiv \eta\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta\frac{\partial \eta}{\partial u}, \\ t\frac{\partial y}{\partial u} - y\frac{\partial t}{\partial u} &\equiv \zeta\frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi\frac{\partial \zeta}{\partial u}, \\ t\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial t}{\partial u} &\equiv \xi\frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta\frac{\partial \xi}{\partial u}, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

ce qui peut s'écrire en posant

$$\theta_1 = \frac{\xi}{t}, \qquad \theta_2 = \frac{\eta}{t}, \qquad \theta_3 = \frac{\zeta}{t}; \tag{14}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x}{t}\right) &= \theta_2\frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3\frac{\partial \theta_2}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y}{t}\right) &= \theta_3\frac{\partial \theta_1}{\partial u} - \theta_1\frac{\partial \theta_3}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{z}{t}\right) &= \theta_1\frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2\frac{\partial \theta_1}{\partial u}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

[1] Bien entendu $(q_{14}, q_{24}, q_{34}, 0)$ sont les coordonnées homogènes du *plan* contenant la droite et le sommet du tétraèdre opposé à la face $x_4 = 0$.

Si nous supposons les lignes, $u =$ const., aussi asymptotiques, on aura aussi, *avec un facteur de proportionnalité* ρ *qui résulte des opérations déja faites*,

$$t\frac{\partial x}{\partial v} - x\frac{\partial t}{\partial v} = \rho\left(\eta\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta\frac{\partial \eta}{\partial v}\right) \tag{16}$$

et analogues, en permutant circulairement x, y, z et ξ, η, ζ. Les formules (16) se transforment en

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x}{t}\right) = \rho\left(\theta_2\frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3\frac{\partial \theta_2}{\partial v}\right) \tag{17}$$

et analogues. Exprimons maintenant que les expressions

$$\left(\theta_2\frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3\frac{\partial \theta_2}{\partial u}\right)du + \rho\left(\theta_2\frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3\frac{\partial \theta_2}{\partial v}\right)dv \tag{18}$$

et analogues sont différentielles totales. On trouve

$$\left(\theta_2\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial u\,\partial v} - \theta_3\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial u\,\partial v}\right)(1-\rho) + (1+\rho)\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial v}\frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \frac{\partial \theta_3}{\partial v}\frac{\partial \theta_2}{\partial u}\right) = 0 \tag{19}$$

et analogues. Les trois équations (19) et analogues étant multipliées respectivement par θ_1, θ_2, θ_3 puis ajoutées, on trouve

$$(1+\rho)\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial u} & \frac{\partial \theta_2}{\partial u} & \frac{\partial \theta_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial v} & \frac{\partial \theta_2}{\partial v} & \frac{\partial \theta_3}{\partial v} \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Le déterminant qui figure dans (20) ne peut être nul s'il s'agit d'une surface non développable; en effet, d'après (14), θ_1, θ_2, θ_3 sont les paramètres directeurs de la normale à la surface ; la nullité du déterminant en jeu entraînerait celle de

$$\begin{vmatrix} \theta_1\frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2\frac{\partial \theta_1}{\partial u} & \theta_1\frac{\partial \theta_2}{\partial v} - \theta_2\frac{\partial \theta_1}{\partial v} \\ \theta_1\frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3\frac{\partial \theta_1}{\partial u} & \theta_1\frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3\frac{\partial \theta_1}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ou encore du jacobien

$$\frac{D\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}, \frac{\theta_3}{\theta_1}\right)}{D(u, v)},$$

de sorte que le plan tangent à la surface resterait parallèle aux plans tangents d'un certain cône au lieu de pouvoir prendre une orientation arbitraire. Donc l'équation (20) entraîne nécessairement $\rho = -1$, et par suite nous avons démontré les formules (L), en même temps que (19), où l'on remplace ρ par -1, fournit le résultat exprimé par (1).

En même temps nous pourrions poser

$$(14') \qquad \theta_1 = \frac{x}{\tau}, \qquad \theta_2 = \frac{y}{\tau}, \qquad \theta_3 = \frac{z}{\tau}$$

et les équations (13) seraient complétées par

$$(13') \qquad \begin{cases} \xi \dfrac{\partial \tau}{\partial u} - \tau \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = z \dfrac{\partial y}{\partial u} - y \dfrac{\partial z}{\partial u}, \\ \xi \dfrac{\partial \tau}{\partial v} - \tau \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = -\left(z \dfrac{\partial y}{\partial v} - y \dfrac{\partial z}{\partial v} \right) \end{cases}$$

et analogues : ces équations ne diffèrent des premières que par l'échange des lettres x, y, z, t et ξ, η, ζ, τ. On aura donc aussi

$$(L') \qquad \begin{cases} \dfrac{\xi}{\tau} = \displaystyle\int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} \right) du - \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \right) dv, \\ \dfrac{\eta}{\tau} = \displaystyle\int \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} \right) du - \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial v} \right) dv, \\ \dfrac{\zeta}{\tau} = \displaystyle\int \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial a} \right) du - \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right) dv, \end{cases}$$

avec θ_1, θ_2, θ_3 solutions de l'équation

$$(1') \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = k_1(u, v)\, \theta.$$

4. Sans insister davantage sur les nombreuses conséquences de ces formules (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, Déformation infiniment petite des surfaces), il y a intérêt à signaler quelques formes remarquables de l'équation (1). Prenons d'abord

$$k(u, v) \equiv 0;$$

chaque fonction θ_1, θ_2, θ_3 est une somme d'une fonction de u seul et d'une fonction de v seul; écrivons

$$(21) \qquad \theta_1 = U_1 + V_1, \qquad \theta_2 = U_2 + V_2, \qquad \theta_3 = U_3 + V_3,$$

on a

$$(22)\quad \begin{cases} x = V_2 U_3 - V_3 U_2 + \int U_2\, dU_3 - U_3\, dU_2 - \int V_2\, dV_3 - V_3\, dV_2, \\ y = V_3 U_1 - V_1 U_3 + \int U_3\, dU_1 - U_1\, dU_3 - \int V_3\, dV_1 - V_1\, dV_3, \\ z = V_1 U_2 - V_2 U_1 + \int U_1\, dU_2 - U_2\, dU_1 - \int V_1\, dV_2 - V_2\, dV_1. \end{cases}$$

C'est une surface signalée incidemment par Darboux (*Théorie des surfaces*, t. III, p. 368). On a la propriété intéressante :

$$(23)\quad \begin{cases} U'_1 \dfrac{\partial x}{\partial u} + U'_2 \dfrac{\partial y}{\partial u} + U'_3 \dfrac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ V'_1 \dfrac{\partial x}{\partial v} + V'_2 \dfrac{\partial y}{\partial v} + V'_3 \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

En chaque point d'une asymptotique, la tangente à l'autre ligne asymptotique est parallèle à un plan fixe.

Les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution sont définies par les formules (22), où l'on suppose de plus

$$(24)\quad U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = \frac{p}{4i},$$

où p est le paramètre du paraboloïde : on obtient des surfaces réelles pour p réel ou p imaginaire pure.

Les surfaces développées des surfaces minima s'obtiennent pour

$$(25)\quad U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = 0.$$

On remarquera que, si l'on prend pour U_1, U_2, U_3 des polynomes entiers en U de degré 2, pour V_1, V_2, V_3 des polynomes entiers en v de degré 2, les courbes $u =$ const. et $v =$ const. seront des cubiques gauches. On trouve ainsi certaines surfaces, qui appartiennent aux deux catégories précédemment indiquées, en prenant ($\varepsilon = \pm 1$)

$$(26)\quad \begin{cases} U_1 = \sqrt{i}\,\dfrac{1 + k^2 - u^2}{2k}, & U_2 = \sqrt{-i}\,\dfrac{1 - k^2 + u^2}{2k}, & U_3 = \sqrt{i}\,\dfrac{u}{k}, \\ V_1 = \varepsilon\sqrt{i}\,\dfrac{1 + k^2 - v^2}{2k}, & V_2 = \varepsilon\sqrt{-i}\,\dfrac{1 - k^2 + v^2}{2k}, & V_3 = \varepsilon\sqrt{i}\,\dfrac{v}{k}, \end{cases}$$

où k est une constante réelle; on obtient une surface réelle, sur laquelle u et v sont imaginaires conjugués pour les points réels de la surface; cette surface est de degré 12, classe 8; elle est applicable sur le paraboloïde de révolution réel $x^2+y^2=4z$. J'ai étudié en détail cette surface, ou plutôt les deux surfaces obtenues pour $\varepsilon=+1$, puis $\varepsilon=-1$, au *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. L, 1922, p. 153-219; j'ai montré que l'une des deux surfaces, mais non l'autre, est *physiquement* applicable sur le paraboloïde.

Si l'on prend

$$(27)\quad \begin{cases} U_1=\sqrt{i}\,\dfrac{1-u^2}{2}, & U_2=\sqrt{i}\,\dfrac{1+u^2}{2}, & U_3=\sqrt{i}\,u;\\ V_1=\varepsilon\sqrt{i}\,\dfrac{1-v^2}{2}, & V_2=\varepsilon\sqrt{i}\,\dfrac{1+v^2}{2}, & V_3=\varepsilon\sqrt{i}\,v,\end{cases}$$

on obtient l'une ou l'autre des développées de la surface minima d'Enneper; le degré est encore 12, la classe 8 et les asymptotiques imaginaires.

La surface minima d'Enneper (degré 9, classe 6) est une autre surface correspondant aux U, V polynomes du second degré : on peut prendre pour elle

$$(28)\quad \begin{cases} x=3u+3v+2u^3+2v^3-6u^2v-6uv^2, & \xi=2u+2v,\\ y=3u-3v+2u^3-2v^3+6u^2v-6uv^2, & \eta=-2u+2v,\\ z=12uv; & \zeta=2u^2+2v^2-1,\\ & \tau=-12uv-8uv(u^2+v^2).\end{cases}$$

Cette surface correspond à

$$(29)\quad \begin{cases} \theta_1=\dfrac{i}{\sqrt{6}}(u+v), \quad \theta_2=\dfrac{i}{\sqrt{6}}(v-u), \quad \theta_3=\dfrac{i}{\sqrt{6}}\left(u^2+v^2-\dfrac{1}{2}\right);\\ \Theta_1=\dfrac{i}{4\sqrt{3}}\,\dfrac{x}{3uv+2uv(u^2+v^2)}, \quad \Theta_2=\dfrac{i}{4\sqrt{3}}\,\dfrac{y}{3uv+2uv(u^2+v^2)},\\ \Theta_3=\dfrac{i}{4\sqrt{3}}\,\dfrac{z}{3uv+2uv(u^2+v^2)}.\end{cases}$$

Cet exemple suffit pour montrer que les deux équations déjà citées

$$(30)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=k(u,v)\,\theta, \qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v}=k_1(u,v)\,\Theta.$$

sont différentes : l'intégration de l'une se ramène à l'intégration de l'autre : j'y reviendrai un peu plus bas.

On obtient une surface encore plus simple, de degré 6 et classe 4 par les formules

$$(31)\quad \begin{cases} x = u - v, & y = u^2 + v^2, \quad z = (u+v)^3; \\ \xi = 3(u^2 - v^2), & \eta = -3(u+v), \quad \zeta = 1, \\ & \tau = -(u+v)(u^2+v^2-4uv), \end{cases}$$

qui correspond à

$$(32)\quad \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{3(u^2-v^2)}{\sqrt{3}}, \quad \theta_2 = \dfrac{-3(u+v)}{\sqrt{3}}, \quad \theta_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \\ \Theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}(u-v)}{(u+v)(u^2+v^2-4uv)}, \quad \Theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}(u^2+v^2)}{(u+v)(u^2+v^2-4uv)}, \\ \Theta_3 = \dfrac{\sqrt{3}(u+v)^3}{(u+v)(u^2+v^2-4uv)}. \end{cases}$$

La surface a pour équations, ponctuelle et tangentielle

$$(33)\qquad (2y - x^2)^3 = z^2, \qquad \eta^4 - 27\zeta^2(\xi^2 - 2\eta\tau) = 0.$$

5. Il est bon de remarquer que, si les coordonnées homogènes tangentielles ξ, η, ζ, τ ont été multipliées par le facteur convenable de sorte que $\theta_1 = \frac{\xi}{t}$ et $\Theta_1 = \frac{x}{\tau}$, la relation

$$x\xi + y\eta + z\zeta + t\tau = 0$$

entraîne

$$(34)\qquad \theta_1\Theta_1 + \theta_2\Theta_2 + \theta_3\Theta_3 + 1 = 0.$$

On déduit de (34) diverses conséquences intéressantes; si l'on a calculé θ_1, θ_2, θ_3, x, y, z (x, y, z désignant les coordonnées cartésiennes), puisque Θ_1, Θ_2, Θ_3 sont proportionnelles à x, y, z, on déduit de (34)

$$(35)\quad \Theta_1 = \frac{-x}{x\theta_1 + y\theta_2 + z\theta_3}, \quad \Theta_2 = \frac{-y}{x\theta_1 + y\theta_2 + z\theta_3}, \quad \Theta_3 = \frac{-z}{x\theta_1 + y\theta_2 + z\theta_3}.$$

La symétrie entraîne

$$(36)\qquad \theta_1 = \frac{-\xi}{\xi\Theta_1 + \eta\Theta_2 + \zeta\Theta_3}, \quad \ldots.$$

Il est facile d'autre part de montrer que, R et R′ étant les rayons de courbure principaux de la surface au point (u, v), c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale, on a

$$(37) \qquad \theta_1 = c\sqrt[4]{-RR'}, \qquad \theta_2 = c'\sqrt[4]{-RR'}, \qquad \theta_3 = c''\sqrt[4]{-RR'}.$$

Cela résulte de ce que, si l'on considère la ligne asymptotique $v = \text{const.}$,

$$(38) \quad \begin{cases} x = \displaystyle\int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u}\right) du, \qquad y = \displaystyle\int \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial u} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial u}\right) du, \\ \qquad z = \displaystyle\int \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial u}\right) du, \end{cases}$$

le déterminant

$$| \, x' \quad x'' \quad x''' \, |,$$

où x', x'', x''' désignent les dérivées par rapport à u, se réduit au carré de

$$\delta \equiv \left| \, \theta_1 \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \quad \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u^2} \, \right|,$$

et que les trois mineurs de la matrice

$$(39) \qquad \left\| \begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{matrix} \right\|$$

sont égaux à $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta\theta_3$. La formule classique

$$(40) \qquad T = \frac{-S(y'z'' - z'y'')^2}{| \, x' \quad x'' \quad x''' \, |}$$

donne donc ici, pour les asymptotiques $v = \text{const.}$,

$$(41) \qquad T = -(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2).$$

Le même calcul, fait pour les asymptotiques $u = \text{const.}$, donne

$$(42) \qquad T = +(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2).$$

D'autre part on sait, d'après la formule d'Enneper (que cette méthode redonnerait aisément), que l'on a pour une asymptotique

$$T = \pm\sqrt{-RR'}.$$

Les formules (37) en découlent aussitôt.

Si l'on considère maintenant la surface polaire réciproque de la proposée, par rapport à la sphère $x^2+y^2+z^2+1=0$ comme définie par les coordonnées *ponctuelles* (ξ, η, ζ, τ), et si l'on appelle $\gamma, \gamma', \gamma''$ les cosinus directeurs de la normale à cette nouvelle surface, ρ et ρ' les rayons de courbure principaux, on a de même

$$(43) \qquad \theta_1 = \gamma \sqrt[4]{-\rho\rho'}, \qquad \theta_2 = \gamma' \sqrt[4]{-\rho\rho'}, \qquad \theta_3 = \gamma'' \sqrt[4]{-\rho\rho'}.$$

La relation (34), si l'on appelle V l'angle du rayon vecteur OM de la première surface avec le plan tangent en M, devient

$$(44) \qquad RR'\rho\rho' = \frac{1}{\sin^4 V},$$

formule élégante et symétrique liant les courbures aux points homologues des deux surfaces polaires réciproques.

6. Il est bon aussi, pour les applications, de savoir calculer $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ par les voies les plus rapides quand on connaît les expressions paramétriques $x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \tau$ *a priori*. On a

$$\theta_1 = \rho\,\xi, \qquad \theta_2 = \rho\,\eta, \qquad \theta_3 = \rho\,\zeta,$$

où ρ est un facteur, numérique ou fonction de (u, v), inconnu. Donc

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial u} = \rho^2 \left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial u} \right)$$

donne le carré de ρ : changer $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ de signe simultanément ne change pas la surface. Comme ρ^2 est seul connu, on voit que θ_1, θ_2, θ_3 peuvent contenir une racine carrée portant sur une fonction de $x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \tau$ et de leurs dérivées : les formules (35) montrent aussitôt que $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ contiendront le même radical. Nous avons donné des exemples de surfaces unicursales, où les coordonnées sont exprimées rationnellement au moyen des paramètres asymptotiques et où $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, et par suite aussi $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ sont aussi rationnels en u et v. Voici un exemple différent, obtenu avec une surface classique, la surface de Steiner, où apparaît un radical. Soient les équations

$$(45) \qquad x = \left(\frac{u+v}{1+uv}\right)^4, \qquad y = \left(\frac{1-uv}{1+uv}\right)^4, \qquad z = \left(\frac{u-v}{1+uv}\right)^4.$$

On vérifie aussitôt qu'en prenant

$$(46)\quad \sqrt{x} = \left(\frac{u+v}{1+uv}\right)^2, \qquad \sqrt{y} = \left(\frac{1-uv}{1+uv}\right)^2, \qquad \sqrt{z} = -\left(\frac{u-v}{1+uv}\right)^2,$$

on a

$$(47)\qquad \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-1=0,$$

et cela permet d'obtenir aussitôt les paramètres du plan tangent

$$(48)\quad \xi = \frac{1}{(u+v)^2}, \quad \eta = \frac{1}{(1-uv)^2}, \quad \zeta = -\frac{1}{(u-v)^2}, \quad \tau = \frac{-1}{(1+uv)^2},$$

et l'on trouve aussitôt que θ_1, θ_2, θ_3 s'obtiennent en multipliant ξ, η, ζ par

$$\sqrt{\frac{2(u^2-v^2)^3(1-uv)^3}{(1+uv)^5}}.$$

7. En dehors de leur intérêt propre, les formules de Lelieuvre conduisent à la solution de la question suivante : « Trouver les surfaces S_1 correspondant à la surface S avec orthogonalité des éléments linéaires. » Si l'on pose pour abréger

$$(49)\qquad (\omega, \theta) = \int\left(\omega\frac{\partial\theta}{\partial u} - \theta\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)du - \left(\omega\frac{\partial\theta}{\partial v} - \theta\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)dv,$$

on constate aussitôt que, si ω est une solution *arbitraire* de l'équation déjà citée,

$$(\mathrm{E})\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = k(u, v)\,\theta,$$

la surface S_1

$$(50)\qquad x_1 = (\omega, \theta_1), \qquad x_2 = (\omega, \theta_2), \qquad x_3 = (\omega, \theta_3),$$

qui n'est plus rapportée à un système d'asymptotiques mais à un système conjugué, correspond à S avec orthogonalité des éléments linéaires.

Si nous considérons en même temps que l'équation (E) l'équation déjà rencontrée aussi

$$(\mathrm{E}')\qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v} = k_1(u, v)\,\Theta$$

correspondant à la surface S, étudiée en coordonnées tangentielles, on constate que ω étant la solution de (E) qui a fourni S_1, l'expression

$$\Omega \equiv x_1\theta_1 + y_1\theta_2 + z_1\theta_3 \tag{51}$$

est solution de (E′) : à toute solution de (E) correspond ainsi une solution de (E′) et inversement. Je ne puis que renvoyer le lecteur au Tome IV de la *Théorie des surfaces* de Darboux.