J. HADAMARD

Sur la théorie des séries entières

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 161-164

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__161_0>

[D2a]

SUR LA THÉORIE DES SÉRIES ENTIÈRES;

PAR J. HADAMARD.

La meilleure méthode pour montrer qu'une série entière est fonction continue de sa variable et peut être dérivée terme à terme, est incontestablement celle qui repose sur la notion de convergence uniforme, grâce à laquelle toutes les opérations d'intégration, puis de dérivation deviennent immédiatement intuitives. Mais l'introduction de cette notion dans l'enseignement des Mathématiques spéciales reste question controversée : d'aucuns la trouvent trop subtile pour le débutant, incapable, à leur avis, de bien saisir la distinction qu'elle implique. Aussi la plupart des cours obtiennent-ils la démonstration cherchée (ou plutôt l'obtenaient-ils, puisque à partir d'aujourd'hui cette démonstration devient facultative) par des calculs directs assez pénibles.

Or on peut éviter à la fois l'un et l'autre de ces deux écueils et obtenir une démonstration parfaitement intuitive, immédiatement déduite d'une idée directrice simple, sans que cette idée risque de dépasser le niveau intellectuel d'une classe de Mathématiques spéciales; on n'utilisera, en effet, que la notion de *série majorante*, nécessairement introduite par ailleurs dans la théorie des séries en général et des séries entières en particulier.

En désignant par

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

la série entière considérée de rayon de convergence R, on peut, si $|x|$ et $|x+h|$ sont plus petits que R, former la différence

$$\begin{aligned} \delta_1 &= f(x+h) - f(x) \\ &= a_1 h + a_2(2xh + h^2) + \ldots + a_n(nhx^{n-1} + \ldots) + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

La série ainsi écrite, laquelle a, comme on le voit, pour termes des polynomes homogènes en x et h *ne contenant aucun signe* —, est convergente comme différence de séries convergentes. Il s'agit, tout d'abord, de savoir si cette quantité tend vers zéro avec h.

En second lieu, h étant supposé différent de zéro, on peut diviser par h et écrire

$$(3)\qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a_1 + a_2(2x+h) + \ldots + a_n(nx^{n-1}+\ldots) + \ldots$$

Nous avons à nous assurer que la série

$$(4)\qquad a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots,$$

formée par les termes indépendants de h est convergente. S'il en est ainsi, soit $f_1(x)$ sa somme; il reste à montrer que la quantité

$$(5)\qquad \delta_2 = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f_1(x) = a_2h + a_3(3hx+h^2) + \ldots$$

tend vers zéro avec h.

Or on sait, par le théorème d'Abel, que la série donnée admet pour *majorante* la série

$$(\mathrm{I})\qquad \mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\mathrm{X} + \ldots = \mathrm{M} + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}'}\mathrm{X} + \ldots + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}'^n}\mathrm{X}^n + \ldots$$

(dans laquelle X représente la valeur absolue de x, pendant que R′ a été pris inférieur d'aussi peu qu'on le veut à R — nous le supposerons, en particulier, supérieur à X — la constante M étant choisie en conséquence) : c'est-à-dire que chaque terme de la série (I)' est positif et supérieur en valeur absolue au terme correspondant de (1), soit

$$(\mathrm{A})\qquad \mathrm{A}_n = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}'^n} \geqq |a_n|.$$

Recommençons sur la série (I) les opérations précédentes, en remplaçant x par sa valeur absolue X et également h par sa valeur absolue H, que nous assujettirons (comme nous le pouvons, puisqu'elle doit tendre vers zéro) aux inégalités

$$(\mathrm{B})\qquad 0 < \mathrm{H} < \mathrm{R}' - \mathrm{X}$$

(égalités exclues). Nous avons d'abord

$$(\mathrm{II})\qquad \Delta_1 = \mathrm{F}(\mathrm{X}+\mathrm{H}) - \mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{A}_1\mathrm{H} + \mathrm{A}_2(2\mathrm{XH}+\mathrm{H}^2) + \ldots$$

Chaque terme de cette nouvelle série est positif et supérieur en valeur absolue au terme correspondant de (2), puisqu'il en est ainsi pour chacun des monomes dont il se compose, et que ces monomes s'ajoutent tous entre eux, au lieu d'être (en général) de signes variables. Mais, la somme de (1) étant

$$(\mathrm{C}) \qquad F(X) = \frac{M}{1 - \frac{X}{R'}},$$

celle de (II) est $\frac{MH}{R'} \frac{1}{\left(1 - \frac{X}{R'}\right)\left(1 - \frac{X+H}{R'}\right)}$; elle tend donc vers zéro avec H et il en est de même *a fortiori* de (2); ce qui démontre le théorème de continuité.

Formons maintenant

$$(\mathrm{III}) \qquad \frac{F(X+H) - F(X)}{H} = A_1 + A_2(2X+H) + \ldots + A_n(nX^{n-1} + \ldots) + \ldots.$$

La série du second membre, laquelle est à termes tous positifs, est encore certainement convergente par construction, du moment que H est différent de zéro. Mais cette convergence entraîne, pour toute valeur de X positive et inférieure à R, celle de la série

$$(\mathrm{IV}) \qquad F_1(X) = A_1 + 2A_2X + \ldots + nA_nX^{n-1} + \ldots$$

formée par les parties indépendantes de H, laquelle a ses termes plus petits que ceux de la précédente. La convergence de (4) s'ensuit immédiatement [1], puisque cette dernière admet (IV) comme majorante.

De plus, on voit que la quantité (III) est plus grande que $F_1(X)$.

Par contre, elle est plus petite que $F_1(X+H)$; car on a, pour chaque terme, d'après la formule des accroissements finis

$$\frac{A_n(X+H)^n - A_nX^n}{H} = nA_n(X+\theta H)^{n-1} < nA_n(X+H)^{n-1}.$$

Or, lorsque H tend vers zéro, $F_1(X+H)$ tend vers $F_1(X)$ (en

---

[1] On voit que l'étude directe de la convergence de la série (IV), si simple qu'elle soit, est inutile, sinon comme exercice sur les règles de convergence.

vertu du théorème de continuité que nous venons de démontrer). Donc il en est de même de l'expression (III).

Donc enfin la différence

$$(\mathrm{V})\quad \Delta_2 = \frac{F(X+H)-F(X)}{H} - F_1(X) = A_2 H + A_3(3HX+H^2) + \ldots$$

tend vers zéro avec H; et, comme elle est supérieure à δ_2, la démonstration est achevée.

En réalité, l'intervention même de la majorante (I) est inutile. Désignons par $F(X)$ une majorante *quelconque* de $f(x)$, ayant un rayon de convergence supérieur à la valeur considérée de $X = |x|$; par exemple, prenons pour les coefficients A_n les valeurs absolues mêmes des a_n, ce qui, on le sait, donne comme rayon de convergence $R' = R$.

L'accroissement positif H étant encore assujetti aux inégalités

$$0 < H < R - X,$$

la convergence des séries (II), (III) et (IV) apparaît comme précédemment. Il est clair, d'autre part, que le second membre de (III) décroît en même temps que le nombre H. Il reste donc borné quand H tend zéro; par exemple, s'il a la valeur D_1 pour $H = \frac{R-X}{2}$, il sera constamment [ainsi que (3)] inférieur à D_1 pour $0 < H \leqq \frac{R-X}{2}$. Il en résulte bien que δ_1 tend vers zéro.

Le reste de la démonstration suit comme il a été dit ci-dessus, ou encore en raisonnant, en ce qui concerne les quotients $\frac{\delta_2}{h}$, $\frac{\Delta_2}{H}$, comme nous venons de le faire pour les expressions (3), (III).

La démonstration gagne ainsi en élégance; mais, au point de vue pédagogique, il ne me paraît pas douteux que la première forme ne doive être préférée et la théorie des séries entières tirée tout entière d'un même principe.

La locution de « majorante » dont je me suis servi, pourrait évidemment être évitée; mais je ne vois à cela aucune utilité. Son introduction dans toute la théorie des séries me semble s'imposer, immédiatement après la démonstration des deux théorèmes fondamentaux qui ramènent la convergence d'une série à termes de signes quelconques à celle d'une série à termes positifs.