Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1924)

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 139-144
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__139_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1924).

Mathématiques élémentaires.

Une sphère S *et un point* P *étant donnés, nous désignerons par la lettre* Σ (*affectée ou non d'indices ou d'accents*) *une sphère passant par* P *et dont le centre est sur* S.

1° *Enveloppe du plan radical des sphères* S *et* Σ *quand le centre* ω *de* Σ *reste dans un plan* Π.

2° *Soient* P' *le second point commun à trois sphères* Σ, Π *le plan de leurs centres*, K *le centre radical de ces trois sphères et de la sphère* S.

Trouver le lieu du point K *et l'enveloppe du plan* Π *quand le rapport* $\dfrac{\overline{KP'}}{\overline{KP}}$ *a une valeur donnée* m; *cas où* $m = -1$.

Trouver l'enveloppe du plan Π *quand le point* K *se déplace dans un plan donné.*

3° *On considère un plan* Π *passant par* P, *et qui n'est assujetti à aucune autre condition. Une sphère* Σ_1, *qui a son centre* ω_1 *sur la circonférence* Γ *commune à* S *et* Π, *coupe* Γ *aux points* A *et* B. *Soient* Σ_2 *et* Σ_3 *celles des sphères* Σ *qui passent respectivement par* A *et* B *et ont leurs centres sur* Γ. *La circonférence commune à ces deux sphères coupe le plan* Π *au point* P *et en un second point* C.

Trouver, pour toutes les positions possibles du plan Π *et du point* ω_1, *le lieu des centres des cercles tangents aux côtés du triangle* ABC.

Quel est, pour un plan Π *donné, le lieu du point de rencontre des hauteurs du triangle* ABC?

4° *Deux sphères* Σ *et* Σ', *de centre* ω *et* ω', *étant orthogonales, l'axe radical de* Σ, Σ', S, *coupe* $\omega\omega'$ *en un point* M. *Lieux de* M *et du milieu de* $\omega\omega'$.

Enveloppe des plans $\omega\omega'\omega''$, *qui contiennent les centres de trois sphères* Σ *orthogonales deux à deux. Lieu du second point commun à ces trois sphères, et lieu du centre de gravité du triangle* $\omega\omega'\omega''$.

5° *Dans le plan* Π_1 *des trois points* ω, ω', ω'', *il existe une infinité de systèmes de trois centres* ω_1, ω'_1, ω''_1 *de sphères* Σ *orthogonales deux à deux. Connaissant le rayon r du cercle circonscrit au triangle* $\omega\omega'\omega''$ *et la distance l du centre de ce cercle à l'orthocentre du même triangle, calculer les angles du triangle* $\omega_1\omega'_1\omega''_1$ *en fonction de l'un d'eux.*

N. B. — On désignera par R *le rayon de* S *et par d la distance de* P *au centre de* S.

Solution par C. Clapier et J. Debey.

1° Soit P un point fixe que nous supposons extérieur à la sphère S de centre O; prenons pour plan de la figure le plan $OP\omega$; le plan radical Δ des sphères S et Σ a pour trace la corde commune AB. Déterminons la distance ρ du point P à ce plan.

Cette distance est représentée sur la figure par

$$\overline{IQ} = \overline{OQ} - \overline{OI}.$$

Dans le triangle $O\omega P$ où $\omega P = \omega A$ nous avons

$$\overline{\omega A}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{O\omega}^2 - 2\overline{O\omega}.\overline{OQ}.$$

Le triangle rectangle ωAE nous donne aussi

$$\overline{\omega A}^2 = 2R(R - OI), \qquad \overline{O\omega} = R.$$

En égalant ces deux expressions, on déduit

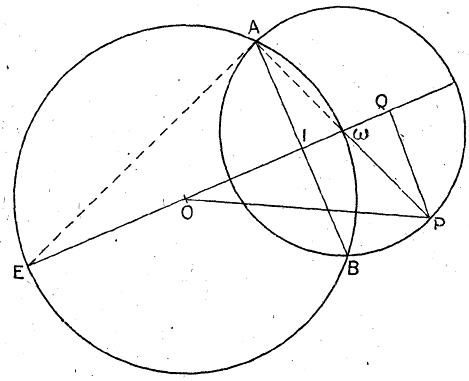
$$2R(OQ - OI) = d^2 - R^2.$$

$$\rho = \frac{d^2 - R^2}{2R}. \tag{1}$$

Ainsi les plans radicaux Δ des sphères S et Σ sont tangents à une sphère C, de centre P, de rayon ρ.

Supposons que ω décrive le cercle d'intersection d'un plan fixe Π

et de S, soient I le point de rencontre de Δ et de la droite $O\omega$, H le point de contact de Δ et C. $O\omega$ et PH toutes deux perpendiculaires à Δ sont parallèles. Si ω décrit un cercle sur S, H décrit



un cercle sur C. Les plans Δ enveloppent donc un cône de révolution circonscrit à C le long du cercle lieu de H.

2° P et P' sont symétriques par rapport à Π, K est sur PP' tel que

$$KP.KP' = KO^2 - R^2$$

ou

$$m\,\overline{KP}^2 = \overline{KO}^2 - R^2.$$

Le lieu de K est une sphère ayant son cercle sur OP. K et H milieu de PP' étant homothétiques par rapport à P, le lieu de H est donc une sphère (R) centrée sur OP.

Le plan Π étant perpendiculaire à PH en H enveloppe une quadrique de révolution autour de OP, ellipsoïde si P est intérieur à (R), hyperboloïde si P est à l'extérieur. Cette quadrique a pour foyers O et P.

Si $m = -1$, K décrit une sphère ayant son centre au milieu de OP.

Si $m = 1$, K décrit un plan, les points P et P' sont confondus et Π passe constamment par le point P.

Le point K est défini sur PP' par la relation

$$KP.KP' = KO^2 - R^2.$$

Fixons K dans son lieu le plan Q. La relation précédente montre que P et P' sont inverses par rapport à une sphère de centre K, de rayon ρ

$$\rho^2 = KO^2 - R^2.$$

Le plan Π' passant par P' et perpendiculaire à PP' est donc le plan polaire de P par rapport à cette sphère. Or on a

$$\rho^2 + R^2 = OK^2,$$

donc cette sphère est orthogonale à S et fait partie d'un réseau. Le plan Π' d'un point fixe P par rapport aux sphères du réseau passe par un point fixe, point diamétralement opposé à P dans la sphère du réseau conjugué qui passe par P. Le plan Π passe donc par un point fixe puisqu'il est l'homothétique de Π' $\left(\text{centre P, rapport } \frac{1}{2}\right)$.

3° Figurons la circonférence Γ, commune à la sphère (S) et au plan Π; supposons pour la facilité de la figure le point P à son intérieur.

Soient ω_2 et ω_3 les points où PA et PB prolongées rencontrent la circonférence Γ; les angles $\widehat{P\omega_2\omega_1}$ et $\widehat{B\omega_2\omega_1}$ étant égaux et ω_1 étant équidistant de P et de B, il en est de même de ω_2 ; ce point est donc le centre de la sphère Σ_2. De même ω_3 est le centre de la sphère Σ_3. Ces deux sphères se coupent dans le plan Π en un point C situé sur le cercle Γ et sur le prolongement de ω_1 P. Nous avons donc un triangle ABC, inscrit dans la circonférence Γ; les points ω_1, ω_2, ω_3 sont les milieux des arcs sous tendus par les côtés; le point P est le point de concours des bissectrices. Si l'on prolonge la bissectrice $P\omega_1$ d'une longueur égale, on obtient le point I_1 sur la sphère Σ_1 ; ce point, tel que l'angle $\widehat{PAI_1}$ est droit, est le centre du cercle exinscrit au triangle ABC relativement à l'angle C.

Il en résulte que le lieu des centres des cercles exinscrits au triangle ABC est la sphère homothétique de S par rapport à P dans le rapport 2.

Supposons le plan Π, donc le cercle Γ fixe; P centre du cercle inscrit dans ABC est fixe ainsi que ce cercle. Or le cercle d'Euler de ABC lui étant tangent (Th. de Feuerbach) et ayant pour rayon $\frac{R'}{2}$ (R' rayon de Γ), le centre ω du cercle d'Euler de ABC décrit un cercle de centre P, et de rayon $r \pm \frac{R'}{2}$ (r rayon du cercle inscrit). Dès lors, le lieu de H, orthocentre de ABC est le cercle homothétique de ce dernier dans le rapport 2 et par rapport à O′ centre de Γ.

4° Le plan radical des deux sphères Σ et Σ′ est perpendiculaire à $\omega\omega'$ et passe par le point P; ces sphères étant orthogonales l'angle $\widehat{\omega P \omega'}$ est droit et le point M est le pied de la perpendiculaire issue de P sur la corde $\omega\omega'$.

Le lieu du point M est le même que celui du milieu μ de $\overline{\omega\omega'}$; c'est une sphère de centre I milieu de OP; on a, en effet, en remarquant que $O\mu$ est dans un plan parallèle à PM,

$$IM = I\mu$$

et

$$I\mu^2 = \frac{\overline{O\mu}^2 + \overline{P\mu}^2}{2} - \frac{d^2}{4}, \qquad \overline{P\mu} = \overline{\mu\omega},$$

$$I\mu^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{d^2}{4}. \tag{2}$$

Dans un plan Π, passant par P, la droite $\omega\omega'$ enveloppe une ellipse de foyer P.

Les trois sphères Σ, orthogonales deux à deux, passant par le point P, le trièdre $P.\omega\omega'\omega''$ est un trièdre trirectangle; soit P_1 la projection de P sur le plan Π_1; c'est le point de concours des hauteurs du triangle $\omega\omega'\omega''$ et en désignant par R_1 le rayon du cercle circonscrit et d_1 la distance du centre au point P_1 nous avons

$$\overline{PP}_1^2 = \frac{R_1^2 - d_1^2}{2}, \qquad \overline{OO}_1^2 = R^2 - R_1^2,$$

et comme

$$\overline{P_1O}^2 = \overline{OO}_1^2 + d_1^2,$$

on a

$$2\overline{P_1P}^2 + \overline{P_1O}^2 = R^2. \tag{3}$$

Le lieu de P_1 est une sphère ayant pour centre le point J situé au tiers de PO; et par suite l'enveloppe de Π_1 est une quadrique de révolution de foyer P, de centre J.

Le second point commun aux trois sphères Σ est le point P_2 symétrique de P par rapport à P_1, il est donc situé sur une sphère homothétique de la précédente.

D'autre part le centre de gravité G_1 du triangle $\omega\omega'\omega''$ est au tiers de O_1P_1; par suite le point J est équidistant de P_1 et G_1. Le lieu du centre de gravité est la sphère principale de la quadrique envelope de Π_1.

5° Le triangle $\omega_1\omega'_1\omega''_1$ est inscrit dans le cercle de rayon $R_1 = r$ et de centre O_1. Son orthocentre P_1 est fixe

$$O_1P_1 = d_1 = l.$$

La considération du triangle $O_1\omega_1P_1$ dans lequel

$$\widehat{O_1\omega_1P_1} = \omega'_1 - \omega''_1$$

nous donne

$$d_1^2 = R_1^2 + \overline{P_1\omega_1}^2 - 2R_1\overline{P_1\omega_1}\cos(\omega'_1 - \omega''_1);$$

or $P_1\omega_1$ est le double de la distance du centre O_1 au côté $\omega'_1\omega''_1$

$$P_1\omega_1 = 2R_1\cos\omega_1,$$

on en déduit, avec les notations de l'énoncé et en supprimant les indices,

$$r^2 - l^2 = 8r^2\cos\omega\cos\omega'\cos\omega'',$$

s'il y a un angle obtus $r < l$. On voit en outre que r et l sont liés par la condition

$$l^2 < 9r^2 \qquad (l < 3r).$$

Des relations

$$\cos(\omega' + \omega'') = -\cos\omega,$$
$$\operatorname{tang}(\omega' + \omega'') = -\operatorname{tang}\omega,$$

nous déduisons l'équation du deuxième degré qui admet pour racines

$$x' = \operatorname{tang}\omega', \qquad x'' = \operatorname{tang}\omega'',$$

$$(4) \qquad mx^2 - \sin\omega\cos\omega . x + m + \cos^2\omega = 0,$$

$$m = \frac{r^2 - l^2}{8r^2} \qquad (|m| < 1);$$

supposons par exemple ω aigu, on remarque en particulier que si

$$-\cos^2\omega < m < 0,$$

l'équation a deux racines, l'une positive, l'autre négative, celle-ci correspondant à l'angle obtus.