NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. GOURSAT

Sur l'intégration des différentielles totales rationnelles

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 81-92

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__81_0>

[C21]

SUR L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES RATIONNELLES;

Par E. GOURSAT.

1. Soient $P(x, y)$, $Q(x, y)$ deux fonctions rationnelles de x et de y, satisfaisant à la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

Nous supposerons, ce qui ne diminue pas la généralité, que ces deux fonctions sont continues pour

$$x = y = 0.$$

Pour intégrer l'équation aux différentielles totales

$$dz = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \tag{2}$$

on peut chercher une fonction primitive de la fonction rationnelle du paramètre auxiliaire t

$$\varphi(t) = x\,P(xt, yt) + y\,Q(xt, yt), \tag{3}$$

s'annulant pour $t = 0$ et remplacer ensuite t par l'unité dans cette fonction primitive. Ce procédé revient au fond à calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

suivant la ligne droite allant de l'origine du point (x, y). Il est facile de vérifier directement ce résultat. Soit en effet $T(x, y)$ l'intégrale définie

$$(4) \qquad T(x, y) = \int_0^1 [x\,P(xt, yt) + y\,Q(xt, yt)]\,dt;$$

la dérivée partielle $\frac{\partial T}{\partial x}$ a pour expression

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \int_0^1 [P(xt, yt) + xt\,P'_x(xt, yt) + yt\,Q'_x(xt, yt)]\,dt,$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte de la condition (1),

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \int_0^1 \frac{d}{dt}[t\,P(xt, yt)]\,dt = [t\,P(xt, yt)]_0^1 = P(x, y).$$

On vérifierait de même que l'on a $\frac{\partial T}{\partial y} = Q(x, y)$.

L'intégration de la fonction rationnelle $\varphi(t)$ du paramètre t exige la résolution d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x et de y. Je me propose de préciser la difficulté algébrique de ce problème et de montrer que l'intégration n'exige aucune résolution d'équation algébrique lorsque les coefficients des fonctions rationnelles $P(x,y)$, $Q(x, y)$ ne satisfont à aucune relation particulière, en dehors de la condition d'intégrabilité (1). Je m'appuierai pour cela sur le lemme suivant :

Tous les résidus de la fonction rationnelle $\varphi(t)$ sont indépendants de x et de y. Le calcul que nous venons de faire prouve en effet que la valeur de l'intégrale définie

$$I = \int_C \varphi(t)\,dt,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque dans le plan de la variable complexe t, est indépendante de x

et de y, car la dérivée $\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x}$ par exemple est égale à

$$\int_{\mathrm{C}} \frac{d}{dt}[t\,\mathrm{P}(xt, yt)]\,dt = 0.$$

2. Cela posé, on sait que l'intégrale $\int \varphi(t)\,dt$ se compose d'une partie rationnelle en t et de termes logarithmiques. La partie rationnelle en t s'obtient par des opérations rationnelles effectuées sur les coefficients de $\varphi(t)$; elle s'exprimera donc rationnellement au moyen de ces coefficients et, par suite, quand on remplacera t par l'unité, on obtiendra *une fonction rationnelle de x et de y.*

Supposons qu'on ait retranché cette partie rationnelle de l'intégrale que l'on cherche; il restera à calculer une fonction primitive d'une fonction rationnelle

$$\varphi(t) = \frac{\mathrm{F}_{m-1}(t)}{\mathrm{F}_m(t)}, \tag{5}$$

$\mathrm{F}_m(t)$ et $\mathrm{F}_{m-1}(t)$ étant deux polynomes en t, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles entières de x et de y; le premier de degré m, le second de degré $m-1$ au plus. De plus, l'équation $\mathrm{F}_m(t) = 0$ n'admet, pour des valeurs arbitraires de x et de y, que des racines simples. Soient

$$\theta_1(x, y),\quad \theta_2(x, y),\quad \ldots,\quad \theta_m(x, y)$$

ces m racines; on a aussi

$$\varphi(t) = \frac{c_1}{t-\theta_1} + \frac{c_2}{t-\theta_2} + \ldots + \frac{c_m}{t-\theta_m},$$

les résidus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ étant indépendants de x et y d'après le lemme établi plus haut. Je dis de plus que *tous ces résidus sont égaux, si le polynome* $\mathrm{F}_m(t)$ *est indécomposable*, c'est-à-dire s'il n'est pas le produit de plusieurs polynomes de degré moindre en t, dont les coefficients sont aussi des polynomes en x, y. Supposons en effet ce polynome indécomposable; les m racines $\theta_i(x, y)$ sont m branches d'une fonction algébrique des deux variables x et y. On peut donc faire décrire aux variables complexes x, y, des chemins fermés tels que la racine $\theta_1(x, y)$ par exemple se change en $\theta_k(x, y)$. La fonction $\frac{c_1}{t - \theta_1(x, y)}$ se change donc en $\frac{c_k}{t - \theta_k(x, y)}$, et comme c_1 et c_k sont des constantes, on a forcément $c_1 = c_k$. On a donc, dans ce cas,

$$\varphi(t) = c\left\{\frac{1}{t - \theta_1} + \frac{1}{t - \theta_2} + \ldots + \frac{1}{t - \theta_m}\right\} = c\,\frac{F'_m(t)}{F_m(t)},$$

car le polynome $F_m(t)$ ne diffère du produit

$$(t - \theta_1)(t - \theta_2)\ldots(t - \theta_m)$$

que par un facteur indépendant de t. La constante c se détermine immédiatement et, par suite, on a

$$(6) \qquad \int \varphi(t)\, dt = c \log\{F_m(t)\}.$$

On voit que, dans ce cas, l'intégrale renferme un seul logarithme et s'obtient sans avoir à résoudre aucune équation. Il est à peu près évident que ce cas doit être considéré comme le plus général; en effet, si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont les fonctions rationnelles les plus générales d'un degré donné vérifiant la condition (1), le polynome $F_m(t)$ correspondant sera indécomposable, si d'autres conditions ne sont pas satisfaites.

3. Si le polynome $F_m(t)$ n'est pas indécomposable, il est égal au produit de plusieurs polynomes indécom-

posables $F_1, F_2, \ldots, F_r$, tous différents

$$F_m(t) = F_1(t)\,F_2(t)\ldots F_r(t), \tag{7}$$

dont les coefficients sont des polynomes entiers en x, y. Le raisonnement du paragraphe précédent prouve que les résidus de $\varphi(t)$, correspondant aux racines d'un de ces polynomes $F_i(t)$, sont égaux et par suite la fonction rationnelle $\varphi(t)$ est de la forme

$$\varphi(t) = c_1\frac{F'_1(t)}{F_1(t)} + c_2\frac{F'_2(t)}{F_2(t)} + \ldots + c_r\frac{F'_r(t)}{F_r(t)}, \tag{8}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_r$ étant des constantes. On a donc

$$\int \varphi(t)\,dt = c_1 \log \vert F_1(t) \vert + c_2 \log \vert F_2(t) \vert + \ldots + c_r \log \vert F_r(t) \vert. \tag{9}$$

Si l'on a décomposé $F_m(t)$ en polynomes indécomposables par la formule (7), les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_r$ se déterminent facilement. On a par exemple le coefficient c_1 en exprimant que $F_{m-1}(t) - c_1 F'_1 F_2 \ldots F_r$ est divisible par F_1.

Toute la difficulté algébrique de la question se ramène donc à ce problème : Étant donné un polynome $F(x, y, t)$ entier par rapport aux variables x, y, t, reconnaître si ce polynome est décomposable en un produit de polynomes de même espèce et, dans le cas de l'affirmative, effectuer cette décomposition.

4. Il est clair que la méthode s'étend immédiatement à l'intégration des différentielles totales de la forme

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

où P, Q, R sont des fonctions rationnelles de x, y, z. Le résultat qui sert de point de départ s'étend aussi aux différentielles totales, quelles que soient les fonctions analytiques $P(x, y)$, $Q(x, y)$, car l'hypothèse que ces fonctions sont rationnelles ne joue aucun rôle dans la démonstration. Si $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ est une différentielle exacte, les résidus de la fonction auxiliaire

$$\varphi(t) = x\,P(xt, yt) + y\,Q(xt, yt),$$

de la variable t, sont indépendants de x et de y. Nous supposons, pour fixer les idées, que P et Q sont des fonctions uniformes.

Cette propriété peut servir à déterminer très aisément la forme générale de certaines différentielles totales à coefficients transcendants.

Considérons par exemple une différentielle totale de la forme

$$(9) \qquad dz = e^{x+ay}\,[P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy],$$

$P(x, y)$ et $Q(x, y)$ étant des fonctions rationnelles de x et de y. On démontre, comme plus haut, que l'on peut prendre pour z l'intégrale définie

$$(10) \quad Z(x, y) = \int_0^1 e^{(x+ay)t}\,[x\,P(xt, yt) + y\,Q(xt, yt)]\,dt.$$

Une suite d'intégration par parties conduit, par des calculs rationnels, à une partie tout intégrée

$$e^{(x+ay)t}\,R(x, y),$$

où $R(x, y)$ est une fonction rationnelle de x et de y, et à une intégrale de la forme

$$\int_0^1 e^{(x+ay)t}\,\frac{F_{m-1}(t;\, x, y)}{F_m(t;\, x, y)}\,dt,$$

F_m et F_{m-1} étant des polynomes de degré m et $m - 1$ en t, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x et de y, et le polynome F_m étant premier avec sa dérivée. Les résidus de la fonction

$$\varphi_1(t) = e^{(x+ay)t}\frac{F_{m-1}}{F_m}$$

doivent être indépendants de x et de y. Soit $t = \theta(x, y)$ une racine de $F_m(t) = 0$; le résidu correspondant

$$e^{(x+ay)\theta(x,y)}\frac{F_{m-1}(\theta)}{F'_m(\theta)}$$

est le produit d'une fonction transcendante par une fonction algébrique. Pour que ce produit se réduise à une constante, il faut évidemment que l'on ait

$$(x + ay)\,\theta(x, y) = c, \qquad \frac{F_{m-1}(\theta)}{F'_m(\theta)} = b,$$

la constante c pouvant être nulle. Les racines de l'équation $F_m(t) = 0$ sont donc de la forme $\theta = \frac{c}{x + ay}$, et la fonction $\varphi_1(t)$ a pour expression

$$\varphi_1(t) = e^{(x+ay)t}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i}{t - \frac{c_i}{x + ay}},$$

et l'intégrale $\int_0^1 \varphi_1(t)\,dt$ devient, en posant

$$t = \frac{u}{x + ay},$$

$$\Phi(x, y) = \int_0^{x+ay} e^u\left(\sum\frac{b_i}{u - c_i}\right)du.$$

On voit immédiatement que la différentielle totale $d\Phi$ a pour expression

$$d\Phi = e^{x+ay}\left(\sum\frac{b_i}{x + ay - c_i}\right)(dx + a\,dy),$$

et toute différentielle exacte (9) est de la forme

$$d\left[e^{x+ay}\mathrm{R}(x,y)\right]+e^{x+ay}\,\frac{\mathrm{F}_{m-1}(x+ay)}{\mathrm{F}_m(x+ay)}(dx+a\,dy),$$

$\mathrm{R}(x,y)$ étant une fonction rationnelle quelconque de x, y et F_m, F_{m-1} deux polynomes de degré égal à l'indice, F_m étant premier avec sa dérivée. Nous voyons de plus que cette décomposition peut être effectuée par des opérations rationnelles. Dans le cas actuel, le polynome $\mathrm{F}_m(t, x, y)$ est toujours décomposable en m facteurs analytiquement distincts.

5. Considérons encore une équation aux différentielles totales du second ordre complètement intégrable

$$d^2 z = \mathrm{P}(x,y)\,dx^2 + 2\mathrm{Q}(x,y)\,dx\,dy + \mathrm{R}(x,y)\,dy^2, \tag{11}$$

où P, Q, R sont des fonctions rationnelles de x et de y. Elle est équivalente au système

$$\left\{\begin{aligned} dp &= \mathrm{P}(x,y)\,dx + \mathrm{Q}(x,y)\,dy,\\ dq &= \mathrm{Q}(x,y)\,dx + \mathrm{R}(x,y)\,dy,\\ dz &= p\,dx + q\,dy,\end{aligned}\right. \tag{12}$$

ce qui donne les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}. \tag{13}$$

En posant, comme plus haut, $x = \mathrm{X}t$, $y = \mathrm{Y}t$, z devient une fonction $\Phi(t;\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y})$, pour laquelle on a

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2\Phi}{dt^2} &= \mathrm{X}^2\mathrm{P}(\mathrm{X}t, \mathrm{Y}t)\\ &+ 2\mathrm{X}\mathrm{Y}\,\mathrm{Q}(\mathrm{X}t, \mathrm{Y}t) + \mathrm{Y}^2\mathrm{R}(\mathrm{X}t, \mathrm{Y}t);\end{aligned} \tag{14}$$

l'intégrale de cette équation qui est nulle, ainsi que sa dérivée, pour $t = 0$, a pour expression

(15) $\Phi(t, X, Y)$

$$= \int_0^t (t-u)[X^2 P(Xu, Yu) + 2XY Q(Xu, Yu) + Y^2 R(Xu, Yu)]\,du,$$

et en faisant $t = 1$ dans le second membre, et y remplaçant X et Y par x et y respectivement, on obtient l'intégrale particulière de l'équation (11) qui est nulle, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, pour $x = y = 0$. Il est aisé de le vérifier par un calcul direct. On a par exemple

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \int_0^t (t-u)[2XP + X^2 u P'_x + 2YQ + 2XYu Q'_x + Y^2 u R'_x]\,du,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = \int_0^t (t-u)[2P + 4Xu P'_x + X^2 u^2 P''_{x^2} + 4Yu Q'_x + 2XY u^2 Q''_{x^2} + Y^2 u^2 R''_{x^2}]\,du,$$

ou, en remplaçant Q'_x, Q''_{x^2}, R''_{x^2} par P'_y, P''_{xy}, P''_{y^2} respectivement,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} &= \int_0^t (t-u)[2P + 4Xu P'_x + 4Yu P'_y + X^2 u^2 P''_{x^2} + 2XY u^2 P''_{xy} + Y^2 u^2 P''_{y^2}]\,du \\ &= \int_0^t (t-u)\left\{2P + \frac{4d}{du}[P(Xu, Yu)] + u^2 \frac{d^2}{du^2}[P(Xu, Yu)]\right\}du \\ &= \int_0^t (t-u)\frac{d^2}{du^2}\Big[u^2 P(Xu, Yu)\Big]\,du \\ &= \left[(t-u)\frac{d}{du}(u^2 P) + u^2 P\right]_{u=0}^{u=t}\end{aligned}$$

ou enfin

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = t^2 P(Xt, Yt).$$

Pour $t = 1$, on a bien $\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} = P(X, Y)$, et l'on vérifierait de même que l'on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X\, \partial Y} = Q(X, Y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} = R(X, Y).$$

L'intégrale (15) se compose d'une partie rationnelle et d'une intégrale de la forme

$$\int \frac{\varphi(t, X, Y)\, dt}{F_m(t, X, Y)},$$

F_m et φ étant deux polynomes en t à coefficients rationnels en X et Y, dont le premier est premier avec sa dérivée F'_m, et dont le second est au plus de degré $m - 1$. Les résidus de cette fonction rationnelle ne sont pas nécessairement indépendants de X et de Y, mais ces résidus sont des *fonctions linéaires* de X et de Y. Soit en effet I_C l'intégrale

$$I_C = \int_C (t - u)\,[X^2 P + 2XYQ + Y^2 R]\, du,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque C dans le plan de la variable complexe u. D'après le calcul que nous venons de faire, on a

$$\frac{\partial^2 I_C}{\partial X^2} = \int_C \frac{d}{du}\left[(t - u)\frac{d(u^2 P)}{du} + u^2 P\right] du = 0$$

et l'on démontrerait de même que l'on a

$$\frac{\partial^2 I_C}{\partial X\, \partial Y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 I_C}{\partial Y^2} = 0.$$

Les conséquences sont analogues à celles qui ont été indiquées au nº 2. Si le polynome $F_m(t, X, Y)$ est indécomposable, la fonction rationnelle $\frac{\varphi}{F_m}$ est de la forme

$$(AX + BY + C)\,\frac{d}{dt}\{\log F_m\},$$

A, B, C étant des constantes, et l'intégrale s'obtiendra par des calculs rationnels.

6. L'introduction de la variable auxiliaire t avait seulement pour but de conserver la symétrie entre les variables x et y, mais le résultat essentiel relatif aux résidus est indépendant de cet artifice. Soient $P(x, y)$, $Q(x, y)$ deux fonctions analytiques uniformes lorsque les variables complexes x et y restent respectivement dans deux domaines D_x et D_y, et qui satisfont à la condition (1) dans ces domaines. Nous supposons de plus que quand on donne à y une valeur constante $\bar{y}$ dans D_y, $P(x, \bar{y})$ et $Q(x, \bar{y})$ sont des fonctions méromorphes de x dans D_x.

Les résidus de la fonction $f(x) = P(x, \bar{y})$ *sont indépendants de* $\bar{y}$. Il suffit pour cela de prouver que la valeur de l'intégrale

$$I = \int_C P(x, \bar{y})\,dx,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque dans D_x, est indépendante de $\bar{y}$. Or on a immédiatement

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \int_C \frac{\partial P}{\partial y}\,dx = \int_C \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = [Q]_C = 0.$$

Inversement, si une fonction $P(x, y)$ satisfait aux conditions précédentes, on peut lui associer une autre fonction $Q(x, y)$, qui est aussi une fonction méromorphe de x pour une valeur constante de y, telle que $P\,dx + Q\,dy$ soit une différentielle exacte. En effet, si les résidus de $P(x, y)$ sont indépendants de y, on a $\int_C \frac{\partial P}{\partial y} dx = 0$, et les résidus de $\frac{\partial P}{\partial y}$ sont nuls. On aura donc pour Q l'intégrale $\int \frac{\partial P}{\partial y} dx$ d'une fonction méromorphe dont tous les résidus sont nuls, c'est-à-dire une autre fonction méromorphe.

En particulier, soit $P(x, y)$ une fonction rationnelle des deux variables x et y, telle que les résidus de la fonction $P(x, y)$ de la seule variable x soient indépendants de y. Le raisonnement prouve qu'on peut lui associer une autre fonction rationnelle $Q(x, y)$ telle que $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ soit une différentielle exacte.