DELASSUS

PÉRÈS

Note sur le choc en tenant compte du frottement de glissement

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 383-391

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__383_1>

[R9b]

NOTE SUR LE CHOC EN TENANT COMPTE DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT;

PAR MM. DELASSUS ET PÉRÈS.

Dans tout ce qui suit nous adopterons uniformément les notations employées dans les deux articles de M. Pérès ([1]), que l'article actuel est destiné à compléter sur certains points.

I.

1. Commençons par préciser les hypothèses ou, plus exactement, les approximations classiques habituelles.

Dans la théorie du choc sans frottement il y a, à chaque instant du choc, une réaction normale très grande ; cette réaction est normale *à la liaison déformée par le choc*, elle a donc une direction variable mais (c'est un fait d'expérience) elle donne naissance *pour la totalité du choc* à une percussion de réaction qui est normale *à la liaison non déformée;* la solution ne fait intervenir que l'instant initial et l'instant final donc élimine la déformation.

Il n'en est plus de même pour le choc avec frottement. Il faut alors, en général, faire intervenir la suite

([1]) PERÈS, *N. A.*, 5 série, t. II, 1923-1924, p. 98 et 216.

continue des états intermédiaires en tenant compte de la déformation ou en la négligeant. Dans la théorie classique, à laquelle se rapporte cet article, *on néglige la déformation* et l'on applique au mouvement pendant le choc les lois ordinaires du frottement, la réaction normale et la réaction tangentielle étant définies par la liaison non déformée.

2. Les approximations ainsi faites qui, dans le cas d'un frottement négligeable, conduisent en accord avec l'expérience à une percussion totale normale à la liaison non déformée, reviennent, en somme, à assimiler le mouvement de choc avec frottement à un mouvement ordinaire avec frottement, mais il reste néanmoins une différence essentielle :

Dans le mouvement ordinaire la vitesse normale W est constamment nulle ; dans le mouvement de choc il n'y a pas de mouvement normal, puisqu'on néglige la déformation, mais cela n'empêche pas W de varier en passant par une suite continue de valeurs. Au mouvement tangentiel vient s'ajouter ce que l'on pourrait appeler un mouvement normal de vitesse. Quand le choc est sans frottement W va constamment en croissant de sa valeur initiale négative W_0 à la valeur positive $-eW_0$ qui indique la fin du choc ; quand le choc a lieu avec frottement ce mouvement constamment croissant de W n'existe plus forcément, mais nous continuerons à admettre que la fin du choc est arrivée quand W atteint pour la première fois la valeur $-eW_0$; c'est là une hypothèse et non plus une approximation, elle est commode comme donnant une définition unique de la fin du choc, mais ne pourrait se justifier que par des expériences qui n'ont jamais été tentées.

3. Du fait que W était constamment nulle pour tout

mouvement ordinaire résultait que les réactions initiales de tous les mouvements obtenus en faisant varier le coefficient de frottement avaient leurs extrémités sur une même parallèle au diamètre conjugué D de Oy dans l'ellipse $\varphi = 1$ (cas du plan) ou sur un même plan parallèle au plan diamétral conjugué D de Oz dans l'ellipsoïde $\varphi = 1$ (cas de l'espace) et cela conduisait à l'impossibilité du mouvement chaque fois que la vitesse initiale de glissement indiquait une réaction de glissement *au-dessous* de la droite ou du plan D [1].

On est tenté, par généralisation, d'appliquer ce résultat au mouvement de choc puisqu'on l'assimile à un mouvement ordinaire avec frottement, mais cette généralisation est fausse. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre le cas d'impossibilité du mouvement plan avec frottement; nous avons des conditions initiales (C) d'impossibilité du mouvement, l'expérience nous apprend qu'il y a choc ramenant brusquement aux conditions initiales du roulement [2]; mais ce choc effectif débute par ces mêmes conditions (C); donc, pour le choc, celles-ci ne sont pas des conditions initiales d'impossibilité.

Cela tient en réalité à l'existence, dans le cas du choc, du mouvement normal de vitesse. Deux mouvements de choc à débuts identiques donnent des vitesses W et W_1 qui ne sont pas identiquement nulles de sorte qu'on ne sait rien sur $W - W_1$ ni sur $\left(\frac{dW}{dt} - \frac{dW_1}{dt}\right)_0$; comme la propriété de la droite D ou du plan D résultait de ce que cette quantité était nulle dans le mouvement ordinaire, on en conclut qu'elle n'existe plus dans le cas du mouvement de choc. Ainsi :

---

[1] DELASSUS, *N. A.*, 4e série, t. XX, 1920, p. 485.
[2] *Ibid.*, p. 491.

Pour le mouvement de choc il n'existe jamais de conditions initiales d'impossibilité et la discussion de M. Pérès (plan ou espace) s'applique toujours.

4. Revenons au cas d'impossibilité du mouvement ordinaire plan. Il se produit au début un choc qui n'est intéressant que par son résultat final connu d'avance, mais dont on peut facilement étudier la nature en remarquant qu'on est dans le cas (c) de la discussion plane de M. Pérès puisque M_0 est sur Ox et p entre A et K; il y a choc à deux périodes G et R amenant au point M_1 placé en O.

Essayons d'étudier le cas analogue de l'espace. On suppose que les conditions initiales (C) conduisent à une réaction initiale X_0, Y_0, Z_0 dirigée suivant une demi-génératrice du cône positif de frottement située *au-dessous* du plan D. Il se produit choc avec frottement, le point de départ M_0 étant dans le plan des xy et tout ce que nous savons *a priori* sur ce choc c'est qu'il sera suivi d'un mouvement ordinaire, donc qu'il transformera les conditions (C) d'impossibilité de mouvement en conditions (C') de possibilité de mouvement.

Ces conditions (C') ne sont plus, comme dans le cas du plan, connues *a priori* et pour les déterminer il faut faire l'étude complète du choc.

Bornons-nous ici à montrer que ce choc conduira toujours au résultat cherché, c'est-à-dire à des conditions (C') de possibilité pour le mouvement.

La discussion de M. Pérès montre que, dans le mouvement indéfiniment prolongé du point M, la cote de ce point croît indéfiniment, que le choc soit à période unique ou à deux périodes; autrement dit, W part de W_0, varie d'une façon continue et finit par tendre vers $+\infty$.

Dans le cas actuel $W_0 = 0$, le point M_0 est dans le plan des xy et, par hypothèse, le point P_0 est *au-dessous* du plan D, ce qui donne un vecteur OR_0 dirigé vers le bas et montre que la courbe (M) part de M_0 en descendant. La vitesse W part de zéro en décroissant, elle est donc négative au début, et comme elle deviendrait finalement infinie et positive elle est obligée par continuité de revenir s'annuler; la première fois que ce fait se produit le choc est terminé, d'une part, et, d'autre part, W passe du négatif au positif, donc va en croissant, de sorte que le point M_0 du plan des xy qui termine le choc se trouve sur une portion *ascendante* de la trajectoire de M et, s'il n'est pas en O, donne un point P situé *au-dessus* du plan D.

Le choc donne donc pour le mouvement ordinaire ultérieur des conditions initiales soit de roulement, soit de glissement possible, c'est-à-dire la solution complète sans impossibilité ni indétermination.

Il est à remarquer que si l'on avait essayé de traiter le choc dans les mêmes conditions mais en supposant la réaction X_0, Y_0, Z_0 au-dessus du plan D, on aurait eu une courbe (M) partant du point M_0 du plan des xy en montant. Ce choc ne pourrait pas avoir lieu puisque, dès son début, la molécule au contact prendrait une vitesse normale positive indiquant l'échappement. De là et de ce qui précède résulte cette conclusion :

Des conditions initiales quelconques de mouvement sont toujours des conditions initiales de possibilité soit pour le mouvement, soit pour le choc, mais jamais pour les deux simultanément.

Il est bon de faire remarquer que les cas d'impossibilité de choc ici signalés n'infirment pas la conclusion précédemment indiquée (§ 3) qu'il n'y avait jamais d'impossibilité pour le mouvement de choc. Nous supposions à ce moment choc ordinaire ($W_0 < o$) tandis qu'actuellement nous nous plaçons dans le cas limite ($W_0 = o$) donnant des propriétés spéciales.

L'étude faite dans ce paragraphe met en évidence ce fait curieux et inattendu que, dans certains cas, l'étude d'un mouvement avec frottement de glissement exige l'étude préalable d'un problème de choc avec frottement.

II.

5. Dans le cas du choc plan les formules fondamentales de M. Pérès

$$\Delta U = \frac{\partial \varphi(X, Y)}{\partial X}, \qquad \Delta V = \frac{\partial \varphi(X, Y)}{\partial Y}$$

linéaires et homogènes montrent qu'à tout déplacement ΔU, ΔV, du point M correspond une percussion de réaction bien déterminée et que si ce déplacement est la résultante de plusieurs autres, la percussion est la résultante de celles qui correspondent aux déplacements composants.

Tout choc à deux périodes est donné par deux déplacements rectilignes M_0M', $M'M_1$; il pourra être remplacé, au point de vue du calcul, par le choc correspondant au chemin rectiligne M_0M_1, choc résultant que nous appellerons le *choc rectiligne*, dont la percussion sera la résultante des percussions qui correspondent aux deux périodes et qui sera complètement déterminé par la connaissance des deux points M_0, M_1. On aura ainsi ΔU et ΔV d'où l'on déduira X et Y puis, par les équations de percussion, toutes les variations de vitesses.

Tous les cas de choc à deux périodes peuvent se ranger en deux catégories :

a. Glissement suivi de roulement. — Le point M_1 est alors sur Oy, donc est déterminé par

$$U_1 = 0, \qquad V_1 = -eV_0.$$

b. Glissement positif suivi de glissement négatif. — Le déplacement M_0M' est parallèle à la droite Or qui correspond aux glissements positifs et dont on calcule aisément les paramètres directeurs α, β au moyen de f et des coefficients de l'ellipse φ. De même $M'M_1$ est parallèle à Or', qui correspond aux glissements négatifs et dont on calcule les paramètres directeurs $\alpha'\beta'$. En écrivant que les parallèles à Or et Or', menées respectivement par M_0 et M_1 se rencontrent sur Oy et adjoignant l'équation finale du choc, on a deux équations

$$\frac{\beta U_0 - \alpha V_0}{\alpha} = \frac{\beta' U_1 - \alpha' V_1}{\alpha'}, \qquad V_1 = -eV_0$$

qui déterminent U_1, V_1 et permettant de traiter le choc rectiligne. Les deux cas a, b ne conduisent donc pas aux mêmes équations, mais la discussion plane de M. Pérès montre chaque fois dans lequel de ces deux cas on se trouve, donc quelles sont les équations à employer.

Nous remarquons que la percussion de choc rectiligne doit toujours, à titre de vérification, être une percussion de roulement, c'est-à dire à l'intérieur de l'angle positif de frottement. Elle est en effet résultante d'une percussion effective de glissement et d'une percussion effective de roulement (cas a), c'est-à-dire de deux vecteurs dont l'un est sur un côté de l'angle de frottement et dont l'autre est à l'intérieur, ou bien (cas b), résultante de deux percussions effectives de glissement, c'est-à-dire de deux vecteurs portés par les deux côtés de l'angle de frottement.

6. Les raisonnements précédents peuvent s'étendre au cas de l'espace et conduire encore à la notion résultante de choc rectiligne, avec cette seule différence que le parcours curviligne de M doit être considéré comme décomposé en éléments rectilignes infiniment petits. Chacun de ces éléments donnera une percussion de glissement effectif, vecteur infiniment petit porté par une génératrice du cône positif de frottement. Chaque élément rectiligne fini du chemin M_0M_1 donnera une percussion analogue mais finie; enfin si le parcours de M se termine par un segment de Oz, il y correspondra une percussion de roulement effectif, c'est-à-dire intérieure au cône positif. En composant toutes les percussions ainsi disposées on obtiendra sûrement une résultante intérieure de sorte que, comme dans le cas du plan, la percussion du choc rectiligne devra toujours être, à titre de vérification, une percussion de roulement.

L'étude effective du choc exige l'intégration des équations de la courbe (M). Au point de vue pratique, le résultat final du choc nous importe seul. Peut-on l'obtenir sans intégration?

L'intégration des équations (M) est en général nécessaire pour déterminer le point M_1 et, quand cette determination est faite, on traite la question de choc par la considération simple du choc rectiligne M_0M_1.

Or, le point M_1 est connu *a priori* quand on sait que le choc se termine par roulement : il est alors sur Oz à l'altitude $-eW_0$ et, d'autre part, la discussion de M. Pérès permet de reconnaître, sans aucune intégration, si l'on est dans ce cas. Donc :

Le résultat final du choc avec frottement s'obtient sans aucune intégration chaque fois que ce choc se termine par roulement.

Il suffit d'appliquer le choc rectiligne aboutissant au point M_1 défini par

$$U_1 = V_1 = 0, \qquad W_1 = - e W_0.$$