Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 315-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__315_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Épreuve théorique. — I. *On considère la courbe gauche définie par les formules*

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ch} z \\ y &= \operatorname{sh} z \end{aligned} \qquad \left(\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ \operatorname{sh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}\right).$$

1° *Former l'équation du plan osculateur au point de cote* z *et celle de la trace de ce plan sur le plan des* xy.

2° *Lorsque* z *varie, cette trace enveloppe une courbe plane; calculer les coordonnées du point de contact de la trace et de son enveloppe en fonction de* z; *vérifier que ce point est sur la tangente à la courbe gauche au point* x, y, z.

3° *Construire la courbe enveloppe précédente.*

II. *Ellipsoïde d'inertie.*

Indications sur la solution de I. — La première partie se traite immédiatement et l'on trouve la trace

$$-X \operatorname{sh} z + Y \operatorname{ch} z + z = 0,$$

d'où, pour le point de contact avec l'enveloppe,

$$X = \operatorname{ch} z - z \operatorname{sh} z, \qquad Y = \operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} z;$$

on retrouve le même point en cherchant la trace sur xy de la tangente à la courbe gauche au point x, y, z.

Épreuve pratique. — *Soit l'équation différentielle*

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

1° *Déterminer la solution telle que, pour* $x = 0$, *on ait* $y = 0$, $y' = 1$. *Construire la courbe intégrale correspondante* (γ).

2° *Soient* A_n *le point de l'axe des* x *d'abscisse* $n\pi$ *et* S_n *l'aire comprise entre la corde* $A_n A_{n+1}$ *et l'arc* $A_n A_{n+1}$ *de* (γ). *Calculer* S_n; *calculer, avec l'approximation des tables à cinq décimales, les limites pour* n *infini des sommes*

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n, \quad |s_1| + |s_2| + \ldots + |s_n|.$$

3° *Sur l'arc* $A_n A_{n-1}$ *il y a un point d'inflexion* B_n. *Soient* M *un point de la courbe voisin de* B_n *et* R *le rayon de courbure de* (γ) *en* M. *Montrer que le produit* $|R \times MB_n|$ *tend vers une limite* λ_n *quand* M *tend vers* B_n. *Étudier comment varie* λ_n *avec l'entier* n *et calculer sa valeur minima.*

Indications sur la solution. — L'intégrale cherchée de l'équation différentielle proposée est $y = e^{-x} \sin x$.

On trouve

$$s_n = (-e^{-\pi})^n \frac{1 + e^{\ \pi}}{2}$$

et l'on a à calculer les limites des sommes de deux progressions géométriques de raison $-e^{-\pi}$ et $e^{-\pi}$.

Pour la troisième partie le point B_n est d'abscisse $n\pi + \frac{\pi}{2}$, le produit indiqué, ou mieux son carré, se calcule sans difficulté. C'est une fonction de x qui prend la forme $\frac{0}{0}$ quand M tend vers B_n et l'on peut trouver sa limite par application répétée de la règle de l'Hopital. Le reste est immédiat.

(Bordeaux, novembre 1923.)

Épreuve théorique. — 1° *Construire la courbe* (C) *qui représente les variations de la fonction*

$$(1) \qquad f(x) = e^{-x}(x+1).$$

Évaluer l'aire limitée, au-dessus de l'axe des x, *par la courbe* (C).

2° *Vérifier que,* x *étant positif, la différence*

$$f(x) - f(-x)$$

est toujours positive et trouver la partie principale de cette différence quand x, *pris pour infiniment petit principal, tend vers zéro.*

3° *Soit* M_1 *un point de la courbe* (C) *d'abscisse positive donnée* x_1 ; *la parallèle à l'axe des* x *menée par* M_1 *rencontre* (C) *en un autre point dont on nommera* $-x_2$ *l'abscisse; on a donc* $f(-x_2) = f(x_1)$.

Soient de même $-x_3$ *tel que* $f(-x_3) = f(x_2)$; $-x_4$ *tel que* $f(-x_4) = f(x_3)$, ...

Quelle est la limite de la suite des nombres ainsi définis : $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

4° *Un point matériel* P, *de masse unité, est mobile sans frottement sur un axe* Ox. *Il est attiré par l'origine proportionnellement à la distance, la force correspondante étant* $F = -\frac{1}{2}x$ (*x abscisse du mobile*); *il est de plus* *soumis à une force dirigée en sens inverse de la vitesse* $\left(v = \frac{dx}{dt}\right)$ *et égale à* $\frac{1}{2}v^2$.

Montrer que, lorsque la vitesse est négative, elle est liée à l'abscisse par la relation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = e^x[f(x) - C]. \tag{2}$$

C *étant une constante et* $f(x)$ *étant la fonction précédente* (1). *Qu'y a-t-il à changer à l'équation* (2) *si la vitesse du mobile est positive.*

Indiquer sommairement, sans chercher à intégrer (2) *les circonstances du mouvement.* [*Conditions initiales : pour* $t = 0$, $x = x_1$ *donné*, $\frac{dx}{dt} = 0$.]

INDICATIONS. — 1° L'aire vaut e. 2° La partie principale est $\frac{2}{3}x^3$. 3° On vérifiera immédiatement que la suite envisagée est décroissante; la limite l est nulle car elle vérifie

$$f(l) = f(-l).$$

4° Ne présente pas de difficultés; on retrouvera, dans l'étude du mouvemeut de P, la suite précédente.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit la courbe représentée paramétriquement par*

$$x = R(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = R(1 - \cos\varphi)$$

(*axes rectangulaires*). *On la fait tourner autour de* Ox.

1° *Aire engendrée par un arc* OM *de cette courbe* (M *étant le point de paramètre* φ).

2° *Coordonnées du point* M_0 *pour lequel l'aire précédente est égale à* $8\pi R^2$.

3° *Volume engendré par l'aire plane comprise entre l'arc* OM_0, Ox *et l'ordonnée de* M_0 *en tournant autour de* Ox.

Indications. — L'application des formules classiques conduit pour déterminer le paramètre φ_0 du point M_0 à l'équation

$$2\cos^3\frac{\varphi_0}{2} - 6\cos\frac{\varphi_0}{2} + 1 = 0.$$

(Marseille, juin 1922.)

Epreuve théorique. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 4y' + 5y = e^x \cos x.$$

II. *Construire, en employant par exemple les coordonnées polaires, la courbe* $y^4 - x^4 + 2y^2 - 5xy + 2x^2 = 0$. *Chercher si la courbe admet des asymptotes.*

La courbe coupe Ox *en un point* A *d'abscisse* $\sqrt{2}$. *Aire comprise entre* OA *et la courbe.*

III. 1° *Construire les projections sur le plan* xOy *des courbes tracées sur la surface* S *qui a pour équation*

$$z = x^2y + y^3$$

et qui coupent à angle droit les sections de S *par les plans parallèles à* xOy.

2° *On considère le solide limité par* S *et la surface*

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

volume de la portion de ce solide pour laquelle on a

$$y > 0, \qquad z > 0.$$

Épreuve pratique. — I. *Un point* M *est soumis à son poids* mg *et à une force* $mg\,\dfrac{\text{OM}}{a}$ *dirigée de* M *vers un point fixe* O.

1° *Surfaces de niveau et lignes de forces du champ ainsi défini.*

2° *Le point* M *est mobile sans frottement sur une droite verticale* D, *située à la distance* $a = \text{OA}$ *du point* O. *Peut-il être en équilibre stable. Étudier le mouvement de* M *abandonné sans vitesse en* A.

3° *Le point* M *est mobile avec frottement sur* D, *le coefficient de frottement est* $\frac{1}{4}$. *Mêmes questions que dans* 2°.

II. x *étant évalué en radians, dire combien l'équation* $4 \sin x - 2x - 1 = 0$ *a de racines. Calculer la plus petite racine positive à* $\frac{1}{100}$ *près.* (Lyon, juin 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Intégrer l'équation*

$$(3x^2 + y^2) y \, dx + (y^2 - x^2) x \, dy = 0 :$$

a. considérée comme équation homogène; *b. en lui donnant un facteur intégrant fonction de* y *seul.*

2° *On considère les cercles* C *d'équation*

$$x^2 + y^2 + (1 - \lambda^2) x - 2\lambda y + (1 + \lambda)^2 = 0,$$

λ *etant un paramètre variable. Soient* D *le lieu de leurs centres,* Γ *leur enveloppe,* C_2 *le cercle particulier obtenu pour* $\lambda = -2$; *dessiner les courbes* D, Γ, C_2 *sur la même figure; préciser l'intersection et la disposition mutuelle de* Γ *avec* D *et* C_2.

3° *Chaque cercle* C *coupe* Γ *en deux points* P *et* Q : *montrer que* PQ *passe par un point fixe* A *et que le produit* $\overline{AP} . \overline{AQ}$ *est indépendant de* λ.

4° *Le point* A *est le point d'abscisse positive sur* Γ *où la tangente est parallèle à* Oy : *calculer à* $\frac{1}{100}$ *près l'aire comprise entre l'arc* OA *de* Γ *et sa corde.*

II. *Une plaque carrée homogène de côté* $a = 1^{m}$ *et de masse* $M = 10^{kg}$ *est mobile autour d'un de ses côtés qui est fixe. A l'instant où sa vitesse angulaire est* $\omega = 2\pi$ *radians par seconde, la plaque s'arrête brusquement en heurtant un obstacle fixe par le côté opposé à l'axe de rotation. La durée du choc étant* $\tau = 0{,}01$ *seconde, quelle est la valeur moyenne de la force de percussion correspondante, supposée normale au plan de la plaque?*

(Toulouse, juillet 1923.)