NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

RAOUL BRICARD

Sur les droites moyennes d’un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 241-254

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__241_0>

[K¹9a]

SUR LES DROITES MOYENNES D'UN TRIANGLE;

PAR RAOUL BRICARD.

1. Le principe de la *géométrie de direction* de Laguerre consiste (dans le plan) à considérer une droite comme *support* de deux *semi-droites*, distinguées par leurs sens. En regardant avec Riemann le plan comme formé de plusieurs *feuillets* superposés, entre lesquels on établit certaines connexions, on peut aller plus loin, et une droite apparaît comme support de $n^{\text{ièmes}}$*-de-droite*, le nombre n pouvant être arbitraire.

Pour simplifier l'exposition, je supposerai dans ce qui suit n égal à trois. Le théorème de Morley, sur les trisectrices d'un triangle ([1]), se présentera comme application immédiate. Je dirai ensuite quelques mots du cas général.

2. Soient P_0, P_1, P_2 trois feuillets plans superposés à un même plan P. Désignons par D_0, D_1, D_2 trois droites orientées, appartenant respectivement à P_0, P_1 et P_2 et superposées à une même droite D orientée du plan P (*semi-droite* de Laguerre). On dira que les D_i sont des *tiers-de-droite orientés*, ayant D pour *support* commun. Une droite non orientée de P peut aussi être

([1]) *N. A.*, 1922-1923, p. 254.

considérée comme support de six tiers-de-droite orientés ([1]).

Il est commode de pouvoir donner aux indices qui distinguent les feuillets P_i des valeurs entières quelconques, étant bien entendu que les feuillets P_i et P_j coïncident, si l'on a

$$i \equiv j \pmod{3}.$$

De même pour les D_i.

3. Dans le plan P, traçons un axe Ox, par exemple horizontal et dirigé de gauche à droite, et fendons les P_i suivant Ox. Soudons le bord supérieur du feuillet P_i avec le bord inférieur du feuillet P_{i+1}. De la sorte, un point M, partant d'une position initiale contenue par exemple dans P_0 et tournant autour de O dans le sens positif, passe successivement dans P_1 et P_2 et revient dans P_0 après avoir fait trois tours.

4. *Angle de deux tiers-de-droite.* — Soient D_i et Δ_j deux tiers-de-droite, supposés d'abord passer par le point O. On désignera par la notation $\sphericalangle(D_i, \Delta_j)$ le plus petit angle dont il faut faire tourner D_i dans le sens positif pour l'amener en coïncidence avec Δ_j. Cet angle est toujours compris entre O et 6π. Il est clair que l'on a

$$\sphericalangle(D_i, \Delta_j) + \sphericalangle(\Delta_j, D_i) = 6\pi. \tag{1}$$

En particulier, Ox étant considéré comme apparte-

([1]) Les droites dont il sera question dans cet article étant presque toujours orientées, ainsi que les tiers-de-droite, j'omettrai le plus souvent de le spécifier.

nant à P_0, l'angle $<(Ox, D_i)$ sera dit *orientation* de D_i.

Si D_i et Δ_j occupent des positions quelconques, l'angle $<(D_i, \Delta_j)$ est par définition l'angle des tiers-de-droites parallèles à D_i, Δ_j et de mêmes sens, menés par le point O.

5. *Trisectrices d'un angle.* — Soient encore les tiers-de-droite D_i et Δ_j passant par l'origine. Il existe un tiers-de-droite unique L_k, passant par l'origine et tel que l'on ait

$$(2) \qquad <(D_i, L_k) = \frac{1}{3} <(D_i, \Delta_j),$$

L_k est la *trisectrice* de l'angle $<(D_i, \Delta_j)$.

Si, laissant fixes les supports D et Δ, on fait varier les indices i et j, on reconnaît aisément que les diverses trisectrices L_k ont pour supports les six rayons d'un hexagone régulier.

L'angle $<(\Delta_j, D_i)$ a également une trisectrice M_l, définie par

$$(3) \qquad <(\Delta_j, M_l) = \frac{1}{3} <(\Delta_j, D$$

Ajoutant (2) et (3) en tenant compte de (1), on obtient

$$<(D_i, L_k) + <(\Delta_j, M_l) = \frac{1}{3} 6\pi = 2\pi.$$

On peut aussi écrire, en introduisant les supports des divers tiers-de-droite qui figurent dans la notation précédente,

$$<(D, L) + <(\Delta, M) = 2\pi,$$

ce qui s'interprète ainsi : *l'angle* $<(D, \Delta)$ *et l'angle* $<(L, M)$ *ont la même bissectrice* Cette remarque facilite le tracé de l'une des trisectrices L, M, quand on connaît l'autre.

Les définitions données permettent de considérer les trisectrices comme tiers-de-droite. Mais, pratiquement, on peut ne faire intervenir que les *supports* des trisectrices, c'est-à-dire considérer celles-ci comme des droites orientées, dans le plan ordinaire. Cela résulte du fait que Δ_j est bien déterminé par la connaissance de D_i et de L. On a en effet d'après (2)

$$<(D_i, \Delta_j) = 3 <(D_i, L_k).$$

Si l'on fait varier l'indice k, L restant fixe, le second membre et par conséquent le premier ne varient que par multiples de 6π, ce qui ne modifie pas Δ_j.

On a supposé D_i et Δ_j passant par l'origine. Le cas général se ramène à ce cas particulier par une translation.

6. *Expressions analytiques.* — Pour le traitement analytique de la théorie qui nous occupe, il est indiqué d'employer les *coordonnées isotropes*. On sait que, (X, Y) étant les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point, les *coordonnées isotropes* de celui-ci sont les nombres

$$x = X + Yi, \qquad y = X - Yi,$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{1}{2}(x + y), \qquad Y = \frac{1}{2i}(x - y).$$

Soit D une droite orientée du plan P, passant par l'origine. Désignons par φ l'angle $<(Ox, D)$, compris entre o et 2π. La droite support de D a pour équation en coordonnées cartésiennes

$$-\sin\varphi X + \cos\varphi Y = 0,$$

et en coordonnées isotropes

$$-\sin\varphi(x+y)+\cos\varphi\frac{x-y}{i}=0,$$

ou

$$(\cos\varphi - i\sin\varphi)x-(\cos\varphi + i\sin\varphi)y=0,$$

ou encore

$$e^{-i\varphi}x - e^{i\varphi}y = 0.$$

Posons

$$e^{i\varphi}=u.$$

L'équation obtenue s'écrit

$$x-u^2y=0.$$

On dira que u est le *paramètre* de la droite orientée D. La droite orientée opposée, qui a le même support, a pour paramètre $-u$.

Considérons maintenant un tiers-de-droite D_t, passant encore par l'origine. Soit L la trisectrice (orientée) de l'angle $<(Ox, D_t)$. Comme on l'a vu, la connaissance de L détermine parfaitement D_t. Si l'on pose

$$<(Ox, L)=\theta, \qquad e^{i\theta}=t,$$

le support de D_t a pour paramètre $e^{3i\theta}=t^3$ et a pour équation

$$x-t^6y=0.$$

La droite non orientée représentée par l'équation précédente est le support de six tiers-de-droite.

Précisons. Donnons-nous $t^6=k$. Si l'on désigne par t l'une des racines de cette équation binome, les cinq autres sont

$$-t, \quad \pm\omega t, \quad \pm\omega^2 t,$$

en posant

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Les tiers-de-droite correspondant à t, ωt, $\omega^2 t$ sont dans des feuillets différents. Les trois tiers-de-droite correspondant à $-t$, $-\omega t$, $-\omega^2 t$ sont opposés aux premiers.

Un tiers-de-droite quelconque, ne passant pas par l'origine en général, a pour support la droite d'équation

$$x - t^6 y - a = 0,$$

où a est une constante (satisfaisant à une condition facile à former, si l'on veut que la droite soit réelle).

Le tiers-de-droite correspondant à une valeur donnée de t sera désigné par la notation $D(t, a)$. On dira que t est le *paramètre* de ce tiers-de-droite (le paramètre de la *droite orientée* du plan P, support de D_t, est t^3).

7. *Droite moyenne de trois tiers-de droite.* — Soient trois tiers-de-droite $D(t_1, a_1)$, $D(t_2, a_2)$, $D(t_3, a_3)$, d'orientations toutes différentes, $D(t_i, a_i)$ ayant pour support la droite

$$x - t_i^6 y - a_i = 0.$$

Considérons la droite ayant pour équation

$$(4) \qquad \| x - t_i^6 y - a_i \quad t_i^2 \quad t_i^4 \| = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Pour développer cette équation sous une forme qui ne soit pas trop prolixe, posons

$$t_i^2 - t_j^2 = (ij).$$

On a les identités

$$\| 1 \quad t_i^2 \quad t_i^4 \| = (21)(31)(32),$$
$$\| t_i^6 \quad t_i^2 \quad t_i^4 \| = t_1^2 t_2^2 t_3^2 (21)(31)(32),$$
$$\| a_i \quad t_i^2 \quad t_i^4 \| = a_1 t_2^2 t_3^2 (32) + a_2 t_3^2 t_1^2 (13) + a_3 t_1^2 t_2^2 (21),$$

et (4) s'écrit

$$(5) \qquad (21)(31)(32)(x - t_1^2 t_2^2 t_3^2 y) = a_1 t_2^2 t_3^2 (32) + a_2 t_3^2 t_1^2 (13) + a_3 t_1^2 t_2^2 (21).$$

Cette droite est le support de deux droites orientées, au sens ordinaire. L'une de celles-ci a pour paramètre $t_1 t_2 t_3$.

Je l'appellerai *la droite moyenne* des trois tiers-de-droite $D(t_i, a_i)$ et je la désignerai par la notation $\Delta(t_1, a_1; t_2, a_2; t_3, a_3)$. Il suffit dans bien des cas d'écrire $\Delta(t_1, t_2, t_3)$.

Cette droite moyenne, définie par (4) ou (5), dépend en apparence du choix des coordonnées. On peut reconnaître par un calcul simple qu'il n'en est pas ainsi, et qu'elle ne dépend que des tiers-de-droite $D(t_i, a_i)$. Mais cette vérification est inutile, car la propriété d'invariance dont il s'agit résulte de la construction géométrique de $\Delta(t_1, t_2, t_3)$, qui sera exposée plus loin.

8. *Propriétés de la droite moyenne.* — 1° *Si les* $D(t_i, a_i)$ *concourent,* $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ *passe par leur point commun.* En effet l'équation du support de Δ est une combinaison linéaire des équations des supports des $D(t_i, a_i)$.

2° *Si* $D(t_1, a_1)$ *et* $D(t_2, a_2)$ *ont un même support (à l'orientation près) non parallèle au support de* $D(t_3, a_3)$, $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ *est la trisectrice d'un angle dont les côtés ont mêmes supports que* $D(t_1, a_1)$ *et* $D(t_3, a_3)$.

Il résulte d'abord du 1° que Δ concourt avec les deux supports considérés. En second lieu, $D(t_1, a_1)$ et

$D(t_2, a_2)$ ayant le même support, on a

$$t_2 = \alpha t_1,$$

α étant une racine sixième de l'unité (autre que 1). Le paramètre de Δ est

$$t_1 t_2 t_3 = \alpha t_1^2 t_3 = (\alpha t_1)^2 (\alpha^{-1} t_3).$$

Δ est donc la trisectrice de l'angle

$$< [D(\alpha t_1, a_1), \quad D(\alpha^{-1} t_3, a_3)],$$

ce qui établit la proposition, α^{-1} étant comme α une racine sixième de l'unité.

3° *Étant donnés quatre tiers-de-droite* $D(t_i, a_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, *les quatre droites moyennes que l'on obtient en les combinant trois à trois sont concourantes.*

C'est là la propriété fondamentale. Il suffit de l'établir pour les trois droites

$$\Delta(t_2, t_3, t_4), \quad \Delta(t_3, t_1, t_4), \quad \Delta(t_1, t_2, t_4).$$

Or les équations de leurs supports sont respectivement

$$\begin{aligned}
(32)(42)(43)(x - t_2^2 t_3^2 t_4^2 y) &= a_2 t_3^2 t_4^2 (43) \\
&\quad + a_3 t_4^2 t_2^2 (24) + a_4 t_2^2 t_3^2 (32), \\
(13)(43)(41)(x - t_3^2 t_1^2 t_4^2 y) &= a_3 t_1^2 t_4^2 (41) \\
&\quad + a_1 t_4^2 t_3^2 (34) + a_4 t_3^2 t_1^2 (13), \\
(21)(41)(42)(x - t_1^2 t_2^2 t_4^2 y) &= a_1 t_2^2 t_4^2 (42) \\
&\quad + a_2 t_4^2 t_1^2 (14) + a_4 t_1^2 t_2^2 (21).
\end{aligned}$$

Multiplions les équations respectivement par

$$t_1^2 (41), \quad t_2^2 (42), \quad t_3^2 (43),$$

et ajoutons. On trouve, par un calcul simple, que le résultat se réduit à $0 = 0$, ce qui établit la proposition.

9. *Droites moyennes d'un triangle.* — Soient D_1, D_2, D_3 les droites supports (non orientées) de $D(t_i, a_i)$. Chacune d'elles supportant six tiers-de-droite, il semblerait *a priori* que le triangle $D_1D_2D_3$ donnât lieu à la construction de 6^3 droites moyennes. Mais le nombre des droites moyennes distinctes est bien moindre. En premier lieu, comme les t_i ne figurent dans les équations que par leurs carrés, il suffit de donner à chacun d'eux les valeurs t_i, ωt_i, $\omega^2 t_i \left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$. En second lieu, on reconnaît que $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ ne change pas, si l'on multiplie tous les t_i par ω ou par ω^2, ce qui permet, dans la recherche de toutes les combinaisons, de donner à t_1 par exemple une valeur fixe. De la sorte, le nombre cherché se réduit à $3^2 = 9$. Ainsi *un triangle a neuf droites moyennes* (non orientées).

On peut écrire comme il suit les symboles de ces neuf droites

$$(\mathrm{T}) \left\{ \begin{array}{lll} \Delta(t_1, t_2, t_3), & \Delta(t_1, \omega t_2, t_3), & \Delta(t_1, \omega^2 t_2, t_3), \\ \Delta(t_1, \omega t_2, \omega^2 t_3), & \Delta(t_1, t_2, \omega t_3), & \Delta(t_1, t_2, \omega^2 t_3), \\ \Delta(t_1, \omega^2 t_2, \omega t_3), & \Delta(t_1, \omega^2 t_2, \omega^2 t_3), & \Delta(t_1, \omega t_2, \omega t_3). \end{array} \right.$$

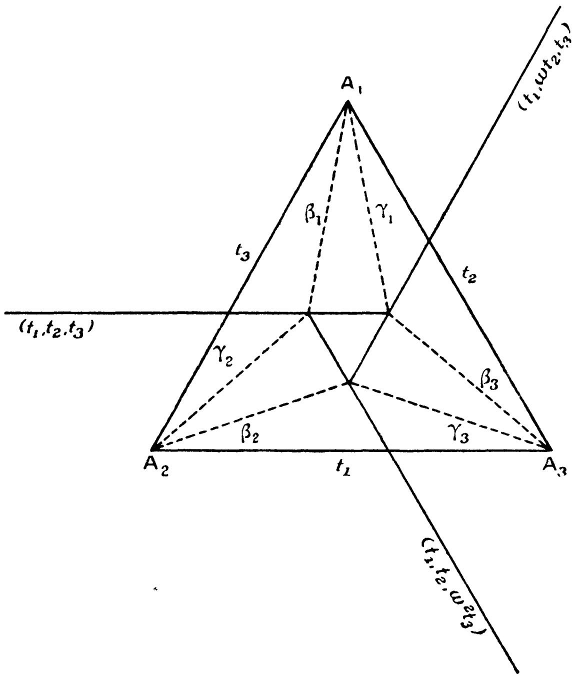
On reconnaît immédiatement, en considérant les paramètres de ces droites, que les trois droites figurant dans une même colonne sont parallèles et que trois droites figurant dans trois colonnes différentes sont parallèles aux côtés d'un triangle équilatéral.

Il est clair qu'un symbole $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ ne change pas de signification si l'on y permute d'une manière quelconque t_1, t_2 et t_3.

10. *Construction d'une droite moyenne.* — Soit à construire la droite moyenne $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ des trois tiers-de-droite $D(t_i, a_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ (voir *fig.*). Adjoignons à ceux-ci le tiers-de-droite $D(\omega t_1, a_1)$. D'après le n° 8, 3°, $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ concourt avec les deux droites

$$\Delta(t_1, \omega t_1, t_2) \quad \text{et} \quad \Delta(t_1, \omega t_1, t_3).$$

Désignons par A_1, A_2, A_3 les sommets du triangle formé par les $D(t_i, a_i)$. La première des droites



indiquées ci-dessus est une certaine trisectrice de l'angle $A_2A_3A_1$ (n° 8, 2°), et l'on sait la construire avec précision.

De même la seconde droite est une trisectrice de l'angle $A_3A_2A_1$. $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ concourt aussi avec

$$\Delta(t_1, \omega^2 t_1, t_2) \quad \text{et} \quad \Delta(t_1, \omega t_1, t_3).$$

La droite moyenne cherchée passant par deux points connus peut ainsi être construite.

On a bien vérifié qu'elle ne dépend pas du choix des coordonnées.

En regardant de plus près la construction précédente, on voit que $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ concourt avec

$$\begin{array}{lcl}
\Delta(t_1, \omega t_1, t_2) & \text{et} & \Delta(t_1, \omega t_1, t_3), \\
\Delta(t_1, \omega^2 t_1, t_2) & \text{et} & \Delta(t_1, \omega^2 t_1, t_3). \\
\Delta(t_2, \omega t_2, t_1) & \text{et} & \Delta(t_2, \omega t_2, t_3), \\
\Delta(t_2, \omega^2 t_2, t_1) & \text{et} & \Delta(t_2, \omega^2 t_2, t_3), \\
\Delta(t_3, \omega t_3, t_1) & \text{et} & \Delta(t_3, \omega t_3, t_2), \\
\Delta(t_3, \omega^2 t_3, t_1) & \text{et} & \Delta(t_3, \omega^2 t_3, t_2).
\end{array}$$

Ainsi *une droite moyenne passe par six points de rencontre de trisectrices.*

11. *Triangles de Morley.* — Prenons dans le tableau (T) (n° 9) deux droites moyennes dont les symboles appartiennent respectivement à la première et à la deuxième colonne, par exemple

$$\Delta(t_1, t_2, t_3) \quad \text{et} \quad \Delta(t_1, \omega t_2, t_3).$$

Quel que soit le choix, il existe dans ces symboles deux des paramètres t_1, t_2, t_3 dont les coefficients sont proportionnels. Ici ce sont t_1 et t_3. Dans la troisième colonne, on trouve le symbole $\Delta(t_1, \omega^2 t_2, t_3)$ présentant la même particularité. Associons aux deux symboles choisis en premier lieu l'un des deux autres symboles de cette colonne, par exemple

$$\Delta(t_1, t_2, \omega^2 t_3).$$

On a choisi, en définitive, les trois droites

$$\Delta(t_1, t_2, t_3), \quad \Delta(t_1, \omega t_2, t_3), \quad \Delta(t_1, t_2, \omega^2 t_3).$$

On vérifie que, dans deux quelconques de leurs symboles, les couples (t_1, t_2) ou (t_1, t_3) ou (t_2, t_3) ont leurs coefficients proportionnels. Je dirai que le triangle équilatéral formé par ces trois droites est un *triangle de Morley* du triangle $A_1 A_2 A_3$.

Comme on l'a vu, on peut choisir arbitrairement deux des côtés d'un tel triangle dans les deux premières colonnes de (T), et il y a encore deux choix possibles pour le troisième côté. Le nombre des triangles de Morley est donc égal à $3^2 \times 2 = 18$.

Cela posé, en raisonnant comme au n° 9, on voit que

$$\Delta(t_1, t_2, t_3) \quad \text{et} \quad \Delta(t_1, \omega t_2, t_3)$$

concourent avec les trisectrices

$$\beta_3 = \Delta(t_1, t_2, \omega t_2) \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \Delta(t_2, \omega t_2, t_3);$$

$$\Delta(t_1, t_2, t_3) \quad \text{et} \quad \Delta(t_1, t_2, \omega^2 t_3)$$

concourent avec les trisectrices

$$\gamma_2 = \Delta(t_1, t_3, \omega^2 t_3) \quad \text{et} \quad \beta_1 = \Delta(t_2, t_3, \omega^2 t_3);$$

$$\Delta(t_1, \omega t_2, t_3) \quad \text{et} \quad \Delta(t_1, t_2, \omega^2 t_3) = \Delta(\omega t_1, \omega t_2, \omega t_3)$$

concourent avec les trisectrices

$$\gamma_3 = \Delta(t_1, \omega t_1, \omega t_2) \quad \text{et} \quad \beta_2 = \Delta(t_1, \omega t_1, t_3).$$

β_1 et γ_1 sont deux trisectrices, respectivement de l'angle $A_2 A_1 A_3$ et de l'angle $A_3 A_1 A_2$. Le produit de leurs paramètres est égal à $t_2^3 t_3^3$. Ce sont donc deux trisectrices *conjuguées*, en entendant par là que ces deux trisectrices sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $A_2 A_1 A_3$. On le reconnaît immédiatement en se reportant à la signification des paramètres. De même β_2 et γ_2, β_3 et γ_3 sont des trisectrices conjuguées des angles A_2 et A_3 du triangle $A_1A_2A_3$. Ainsi :

Un triangle de Morley a chacun de ses sommets aux points de rencontre de deux trisectrices du triangle $A_1A_2A_3$, *chaque angle intervenant par deux trisectrices conjuguées.*

En particulier, si les trisectrices β_i et γ_i sont les six trisectrices intérieures (cas de la figure), elles se rencontrent deux à deux aux sommets d'un triangle de Morley. Le théorème est évident si $A_1A_2A_3$ est équilatéral, et il s'étend par continuité à un triangle quelconque.

C'est là le théorème de Morley dans le cas le plus simple.

Il est intéressant de tracer la configuration complète. On ne pourrait malheureusement le faire ici qu'à une échelle trop réduite pour la clarté.

12. *Extension de la théorie au cas général.* — Si l'on écrit l'équation d'une droite sous la forme

$$x - t^{2n}y - a = 0,$$

on peut considérer cette droite comme support de $2n$ *$n^{ièmes}$-de-droite* orientés, correspondant aux $2n$ paramètres

$$\pm t, \quad \pm \omega t, \dots, \pm \omega^{n-1} t,$$

où ω est une racine primitive de l'équation binome

$$\omega^n - 1 = 0.$$

On a supposé le plan P recouvert de n feuillets $P_0, \dots, P_{n-1}$, fendus suivant Ox, le bord supérieur du feuillet P_h étant soudé au bord inférieur du feuillet

P_{h+1} ($P_n = P_0$). Les $n^{\text{ièmes}}$-de-droite opposés de paramètres $\pm\, \omega^h t$ sont dans le feuillet P_h.

Étant donnés n $n^{\text{ièmes}}$-de-droite

$$D(t_i, a_i) = x - t_i^{2n} y - a_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on appelle *droite moyenne* des $D(t_i, a_i)$ la droite orientée du plan P dont le support a pour équation

$$\| x - t_i^{2n} y - a_i \quad t_i^2 \ldots t_i^{2, n-1} \| = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et qui a pour paramètre $t_1 t_2 \ldots t_n$.

Si l'on se donne seulement les supports des $D(t_i, a_i)$, le nombre des supports de droites moyennes est égal à n^{n-1}.

Le théorème fondamental du n° 8 s'étend au cas général : *étant donnés* $n + 1$ $n^{\text{ièmes}}$*-de-droite, les* $n + 1$ *droites moyennes obtenues en les combinant* n *à* n *sont concourantes*. Cela résulte d'un calcul de déterminants.

Cette propriété permet de construire les droites moyennes de n $n^{\text{ièmes}}$-de-droite donnés, en opérant d'une manière analogue à celle qui a été exposée pour $n = 3$.