BARRÉ

Sur quelques applications du principe de correspondance généralisé

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 2 (1923), p. 201-212
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__201_0>

[M¹2e]

SUR QUELQUES APPLICATIONS DU PRINCIPE DE CORRESPONDANCE GÉNÉRALISÉ;

PAR LE COMMANDANT BARRÉ.

1. *Position de la question.* — Nous nous proposons, dans ce travail, d'indiquer deux applications du principe de correspondance généralisé qui ne nous paraissent pas avoir été remarquées et semblent cependant de nature à constituer un moyen commode de recherches géométriques. Les propositions que nous avons en vue constituent deux théorèmes généraux dont le premier est un cas particulier de la proposition donnée par Zeuthen au n° 102 de son Ouvrage *Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie*. Le second de ces théorèmes est le corrélatif du premier.

Nous les énoncerons ci-après, en les faisant suivre immédiatement, chacun, de quelques-unes de ses applications.

II. — Premier théorème général et ses applications.

2. THÉORÈME I. — *Soit Γ_m une courbe plane de classe m et, dans son plan, une autre courbe Γ_p de classe p. On suppose qu'il existe entre les tangentes de Γ_m et celles de Γ_p une liaison algébrique indécomposable ainsi définie : à chaque tangente de Γ_m correspondent μ tangentes de Γ_p et à chaque tangente de Γ_p ϖ tangentes de Γ_m. Le lieu des intersections des tangentes correspondantes de Γ_m et de Γ_p est une courbe d'ordre $m\mu + p\varpi$.*

La démonstration est entièrement calquée sur celle, bien connue, de la génération des coniques par intersection de faisceaux homographiques de droites.

Soient, sur une droite Δ, un point M, d'abscisse x comptée à partir d'une origine arbitraire, point considéré comme défini par l'intersection de Δ avec une tangente à Γ_m, P un point d'abscisse x' défini par les tangentes à Γ_p.

A un point M quelconque de Δ correspondent m tangentes à Γ_m et, par suite, $m\mu$ tangentes à Γ_p et $m\mu$ points P sur Δ. Inversement à chaque point P correspondent $p\varpi$ points M. La relation entre les abscisses x et x' de ces points est donc de la forme

$$(1)\qquad a x'^{m\mu} x^{p\varpi} + b x'^{m\mu-1} x^{p\varpi} + \ldots + l = 0,$$

équation de degré $m\mu$ en x' et $p\varpi$ en x et dont le degré ne peut s'abaisser que pour des droites particulières ([1]).

Cela posé, un point quelconque de Δ sera sur la courbe lieu des intersections des tangentes correspondantes de Γ_m et de Γ_p s'il est à la fois point M et point P, autrement dit si c'est un point double de la correspondance (1). Son abscisse sera donnée par la relation

$$(2)\qquad a x^{m\mu+p\varpi} + a_1 x^{m\mu+p\varpi-1} + \ldots + l = 0,$$

([1]) On pourrait craindre que la relation entre x et x', tout en etant de degré $m\mu$ en x' et $p\varpi$ en x ne soit pas de degré global $m\mu + p\varpi$. Cela peut, en effet, arriver pour certaines droites Mais, si l'on projette la figure sur un plan, non parallèle à l'une de ces droites, la relation entre les points correspondants sur la projection sera du type général (1). Par suite la démonstration relative au degré de la courbe sera applicable à la courbe projetée et la courbe étudiée sera bien du degré annoncé. On en conclut, par surcroît, que le caractère exceptionnel visé ci-dessus, pour la relation (1), ne saurait se présenter pour toutes les droites du plan.

Mais il existe, par contre, une difficulté, qu'il est bon de signaler. Si le lieu trouvé ne peut se décomposer en deux courbes distinctes sans qu'il en soit de même pour la relation qui lie les tangentes qui, pour la droite générale du plan, est bien de degré $m\mu + p\varpi$, ce qui démontre la proposition.

3. *Remarques.* — 1° Il peut arriver qu'à une tangente commune à Γ_m et à Γ_p corresponde cette tangente elle-même : dans ce cas elle forme une branche du lieu, sans intérêt en général, et qui devra, par suite, ordinairement être considérée comme parasite. Il conviendra donc toujours, dans l'application du théorème, de voir si le fait se produit et d'en déduire les réductions correspondantes.

2° Rien n'empêche, dans ce qui précède, de supposer que Γ_p coïncide avec Γ_m. Mais alors toutes les tangentes sont communes ; il existera donc normalement un certain nombre σ de tangentes à cette courbe qui se correspondent à elles-mêmes. Le vrai lieu sera alors seulement de degré

$$r = m(\mu + \varpi) - \sigma$$

Ces tangentes sont les analogues des « points unis » des correspondances ponctuelles transformant une courbe en elle-même. Nous les appellerons *tangentes unies*.

---

associées (ainsi qu'on le voit très simplement en remarquant qu'à la description de chacun des lieux partiels dont l'ensemble constitue le lieu total correspond évidemment, pour chaque couple de tangentes, une relation algébrique distincte), il est très important de remarquer que rien ne s'oppose à ce que le lieu trouvé soit multiple. C'est la même courbe comptée plusieurs fois Mais pratiquement il sera presque toujours assez facile de s'assurer si une telle réduction a lieu ou non Tout d'abord le degré véritable du lieu ne saurait être qu'un sous-multiple de celui du lieu trouvé par la méthode. Si ce dernier est de degré premier, la particularité ne peut se produire que si le lieu se réduit à une droite, comptée un nombre de fois égal à celui du degré du lieu trouvé. Nous en verrons ci-après un exemple (n° 7 Cas où le point O est un point d'inflexion)

Cas d'une correspondance involutive. — Si, à une tangente T de Γ_m, considérée comme appartenant au premier système, correspond un groupe (T′) de tangentes T′ de la courbe Γ_m, du second système, tel qu'à chaque tangente T′, considérée ensuite comme appartenant au premier système, correspond un même groupe du second système comprenant la tangente T et tel, en outre, que, pour toute autre tangente de ce groupe, considéré comme formant un groupe (T) du premier système on retrouve le même groupe (T′), nous dirons que la correspondance est involutive.

Dans le cas d'une correspondance involutive, le lieu véritable est décrit deux fois et comme, dans ce cas, on a nécessairement $\mu = \varpi$, son degré sera :

$$r = \frac{1}{2}(2m\mu - \sigma).$$

Ceci montre, en passant, que, dans ce cas, σ est nécessairement pair ou nul. On déduit de ce qui précède le théorème suivant.

4. Théorème II. — *Supposons, sur une courbe Γ_m de classe m, réalisée entre les tangentes une correspondance telle qu'à une tangente considérée comme appartenant à une première famille correspondent μ tangentes à la courbe considérées comme formant une deuxième famille et, à chacune de celles-ci, ϖ tangentes de la première famille. Soit σ le nombre des tangentes unies de la correspondance.*

Le lieu des intersections des tangentes correspondantes sera en général de degré

$$r = m(\mu + \varpi) - \sigma,$$

Il se réduira au degré

$$r = \frac{1}{2}(2m\mu - \sigma)$$

en cas de correspondance involutive.

5. *Application.* — Une foule de théorèmes élémentaires bien connus peuvent être démontrés en appliquant ces propositions. Citons, par exemple :

1° La définition de la polaire d'un point par rapport à une conique comme intersection des tangentes aux points d'intersection avec une droite passant par un point fixe.

(Ici : $m = 2$, $p = 2$, $\mu = \varpi = 1$, $\sigma = 2$.)

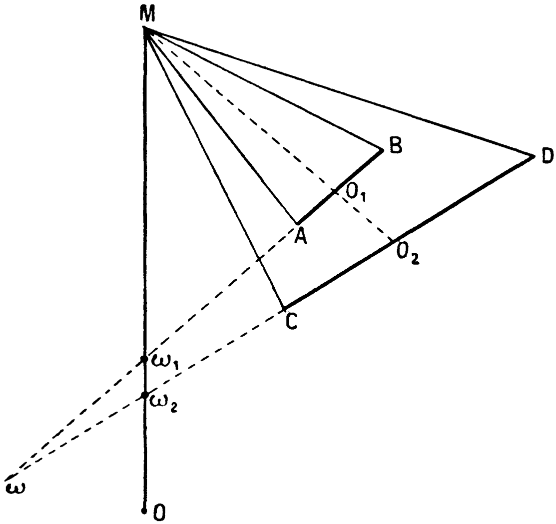
2° Le cercle orthoptique. Γ_m coïncide avec Γ_p; $m = 2$, $\mu = \varpi = 2$ et $\sigma = 4$ (les quatre tangentes isotropes à la conique).

Nous allons en donner quelques applications moins banales.

6. *Soient* O *un point dans un plan*, AB *et* CD *deux segments portés par des droites distinctes de ce plan. On demande le lieu des points* M *de ce plan tels que* OM *ait même conjuguée harmonique par rapport aux angles* AMB *et* CMD.

Soient O_1 et O_2 les conjugués harmoniques de ω_1 et de ω_2, respectivement par rapport à AB et à CD. Les divisions ω_1 et O_1 sont homographiques ; de même ω_2 et O_2 et par suite O_1 et O_2. L'enveloppe de $O_1 O_2$ est donc, sauf les cas exceptionnels énumérés dans la note ci-dessous (¹), une conique (C). Le point M peut être

(¹) 1° Le point O est situé, soit sur la droite qui porte le segconsidéré comme l'intersection de la droite OM du faisceau O avec la tangente $O_1 O_2$ à la conique C.



La correspondance est biunivoque, et l'on a :

$$\mu = \varpi = 1,$$
$$m = 1 \quad (\Gamma_m \text{ réduite au point } O),$$
$$p = 2 \quad (\Gamma_p \text{ est la conique } C).$$

Il reste à déterminer la valeur de σ. Or, si aucune des tangentes issues de O à la conique (C) ne se correspond à elle même, $\sigma = 0$. Pour que cette correspondance

---

ment AB, soit sur celle qui porte CD. Dans ces cas l'enveloppe de $O_1 O_2$ se réduit au conjugué harmonique de O par rapport au segment collinéaire de ce point et le lieu de M est une conique.

2° La droite $O\omega$ a même conjuguée harmonique par rapport aux angles AOB et COD. L'enveloppe de $O_1 O_2$ se réduit encore à un point et le lieu de M a une conique qui peut d'ailleurs dégénérer dans certains cas exceptionnels.

ait lieu, il faut et il suffit que O_1 et O_2 soient alignés sur O et par suite que O_1 et O_2 coïncident respectivement avec ω_1 et ω_2, ce qui ne peut arriver que si ω_1 coïncide avec l'une des extrémités de AB et ω_2 avec l'une des extrémités de CD. Ceci exige que le point O se trouve sur l'une des quatre droites AC, AD, BC ou BD. Dans ce cas il est à peu près évident que la droite en question est bien une droite $O_1 O_2$, c'est-à-dire une tangente à (C) passant par O et l'on a ([1]) $\sigma = 1$. Dans tous les autres cas $\sigma = 0$ et le lieu est une cubique.

Dans le cas exceptionnel

$$r = 1 + 2 - 1 = 2$$

et le lieu est une conique. En résumé :

Dans le cas général le lieu est une cubique

$$(r = 1 + 2 - 0).$$

Les tangentes issues de O à la conique (C) donnent le point O; donc :

Le point O *est un point double de cette cubique qui passe en outre par les quatre points* A, B, C *et* D. *Dans le cas particulier où le point* O *est sur l'une des droites* AC, AD, BC *ou* BD, *le lieu véritable se réduit à une conique passant en* O *et par ceux des quatre points* A, B, C, D *non alignés avec* C.

Remarque. — Lorsque C et D sont confondus avec

([1]) A moins que O ne se trouve à l'intersection de deux de ces quatre droites. Mais alors la droite $O\omega$ a évidemment même polaire par rapport à AOB et à COD, les deux côtés de ces angles coïncidant deux à deux et l'on se trouve dans le deuxième cas d'exception reservé ci-dessus. Le lieu dégénère en deux droites AC et BD et est d'ailleurs de caractère exceptionnel.

les points cycliques, on retrouve une propriété intéressante connue des *strophoïdes générales*, à savoir qu'elles peuvent *être considérées comme le lieu des points* M *du plan tels que l'on voit sous des angles égaux (ou supplémentaires) deux segments* OA *et* OB *définis par trois points non en ligne droite* [1].

[Le point O est le point double de la courbe à laquelle appartiennent d'ailleurs A et B [2].]

7. *Soit* Γ_3 *une cubique générale; par un point fixe* O *de* Γ_3 *on mène une sécante* OM_1M_2 *coupant la courbe en deux points* M_1 *et* M_2 *variables. Lieu de l'intersection des tangentes en* M_1 *et* M_2 *à la courbe.*

La classe est ici : $m = 6$. La correspondance est visiblement [3] (1, 1) et involutive. Le nombre des tangentes unies σ est 4, correspondant aux points de contact des quatre tangentes à la courbe issues du point O, autres que la tangente en ce point. Ces tangentes unies se confondent d'ailleurs avec les quatre tangentes qui déterminent leur point de contact.

La tangente en O est la limite d'une sécante pour laquelle O_1 tend vers O tandis que O_2 tend vers le point d'intersection O′ de la tangente en O avec la courbe; O′ étant différent de O. La tangente en O′ est alors

(1) Si les trois points sont en ligne droite la strophoïde dégénère en un cercle et cette droite. C'est le cas d'exception signalé dans la note de la page 205. La recherche directe du lieu est alors une question de géométrie très élémentaire.

(2) *Voir*, par exemple, NIEWENGLOWSKI : *Géométrie analytique*, t. II, ch. IX, Exercice 7, 1re partie.

(3) On dit que deux points, M et M′, sur une courbe algébrique, sont en correspondance (pq) si ces points M et M′ sont liés par une relation algébrique telle qu'à un point M′ correspondent p points M et qu'à un point M correspondent q points M′.

associée à la tangente en O et leur intersection donne précisément O′. Ce point appartient au lieu. Il en est de même des quatre points de contact des tangentes unies.

Ceci suppose, comme d'ailleurs l'évaluation du nombre des tangentes issues de O, que ce point n'est pas un point d'inflexion. Nous examinerons ce cas ci-après : le supposant écarté, on a donc

$$r = \frac{1}{2}(2 \times 6 - 4) = 4.$$

Donc :

Si le point O *est un point ordinaire non inflexionnel d'une cubique générale, le lieu est une quartique.*

Lorsque le point O est d'inflexion, la tangente d'inflexion est une tangente unie, mais, de plus, elle est la limite des tangentes unies voisines lorsque le point O tend vers le point d'inflexion. De telle sorte qu'on doit la compter pour trois tangentes unies. Appliquant ce résultat on trouve que *le lieu est une cubique.* Mais on sait, par la théorie des courbes du troisième ordre ([1]), que ce lieu est une droite, la polaire du point d'inflexion qui a, par rapport à la courbe, *la même définition que la polaire d'un point par rapport à une conique.* Cette droite est comptée trois fois (*cf.* note du n° 2). Cela tient à ce que, de chacun de ses points, sont issus trois couples de tangentes dont les cordes de contact vont passer au point d'inflexion.

([1]) Propositions IX et XI du Traité de Mac Laurin sur les courbes du 3e degré et corollaires 1 et 2 de la proposition XI. (*Cf.* E. de Jonquières, *Mélanges de Geométrie pure;* voir aussi : Salmon, *Théorie des courbes planes.* Traduction O. Chemin.)

8. *Examen du problème précédent dans le cas d'une cubique cuspidale.* — Dans ce cas, la classe est égale à trois ; le lieu est une droite lorsque O est un point d'inflexion. Cette droite est d'ailleurs la tangente de rebroussement.

Dans le cas où O est un point quelconque, la droite qui le joint au point de rebroussement, bien que non tangente, joue le rôle de tangente unie ; d'autre part il existe une tangente à la courbe, issue de O, en dehors de la tangente en ce point ; on a donc $\sigma = 2$ et, par suite, $r = 2$.

Le lieu dans ce cas est une conique, passant par le point de rebroussement et par le point de contact de la tangente issue du point O.

9. On pourrait multiplier ces exemples. Nous nous bornerons, pour terminer l'examen des applications du premier théorème général, à voir ce qu'il donne dans le cas d'une courbe unicursale avec correspondance $(1, 1)$ entre les tangentes.

La correspondance peut alors être représentée par une relation homographique entre les valeurs du paramètre en fonction rationnelle duquel sont exprimées les coordonnées des points de la courbe, soit :

$$att' + bt + ct' + d = 0.$$

Il y a donc, dans ce cas, deux tangentes unies et, si m est la classe de la courbe, le degré r du lieu est $(\mu = \varpi = 1)$:

$$r = 2(m - 1)$$

dans le cas de non-involution, et

$$r = m - 1$$

dans le cas d'involution.

Ainsi, par exemple, pour un point O ordinaire, non inflexionnel, d'une cubique crunodale ([1]), le lieu qui fait l'objet des paragraphes 7 et 8 est une cubique

$$(r = 4 - 1).$$

III. — Second théorème général et applications.

10. Théorème III. — *Soit C_m une courbe plane de degré m, et, dans son plan, une courbe C_p de degré p. On suppose qu'on ait établi entre les points de C_m et de C_p une liaison algébrique ainsi définie : à chaque point de C_m correspondent μ points de C_p et à chaque point de C_p correspondent ϖ points de C_m. L'enveloppe des droites joignant les points correspondants de C_m et de C_p est une courbe de classe $m\mu + p\varpi$.*

Ce théorème est le corrélatif du théorème I. Il donne lieu aux mêmes remarques et l'on est, de même, conduit au théorème suivant :

11. Théorème IV. — *Supposons, sur une courbe C_m d'ordre m, réalisée une correspondance ponctuelle (μ, ϖ) comportant un nombre σ de points unis.*

L'enveloppe des droites de jonction des points correspondants sera, en général, de classe

$$r = m(\mu + \varpi) - \sigma.$$

Ce nombre se réduira à

$$r = \frac{1}{2}[2m\mu - \sigma]$$

en cas de correspondance involutive (qui se définit absolument comme dans la question corrélative).

([1]) C'est-à-dire possédant un point double à tangentes distinctes.

12. On pourrait, de ces théorèmes, donner tout une série d'applications, ainsi que cela a été fait plus haut, pour les propositions corrélatives.

Nous nous contenterons de signaler qu'ils permettent de retrouver les propositions bien connues des correspondances (1, 1) sur les coniques.