

J. LEMAIRE

Concours d'agrégation de 1922

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 188-200

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__188_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1922.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Fin) (1):

PAR J. LEMAIRE.

V. Deux génératrices fixes Δ_1, Δ'_1 de même système, du paraboloid hyperbolique ayant pour équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0,$$

(1) Voir le début de cette solution dans nos numéros de juillet (p. 385) et d'octobre (p. 27) dernier.

sont rencontrées en M et M' par une génératrice variable G , de l'autre système.

Il n'existe pas en général de point ω d'où l'on voit le segment MM' sous un angle droit lorsque G varie.

Si Δ_1, Δ'_1 sont rectangulaires, il existe une infinité de points ω situés sur un cercle (Γ_1) , dont le plan passe par une droite fixe D_1 , lorsque le couple Δ_1, Δ'_1 varie.

Au deuxième système de génératrices correspondent, de même, des cercles (Γ_2) dont les plans passent par une droite D_2 . Les droites D_1, D_2 se rencontrent en un point I . Former l'équation de la surface (Σ) lieu des cercles (Γ_1) et (Γ_2) , et démontrer que (Σ) est sa propre transformée dans une certaine inversion ayant I pour pôle.

Trouver tous les cercles tracés sur (Σ) , et les pôles des inversions qui n'altèrent pas cette surface.

V. Considérons le paraboloides hyperbolique représenté par

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = \rho x,$$

et soient

$$(\Delta_1) \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda x, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda}, \end{cases}$$

$$(\Delta'_1) \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda' x, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda'} \end{cases}$$

deux génératrices fixes de même système, (G) une

génératrice variable de l'autre système

$$(G) \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\mu}, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\mu x; \end{cases}$$

les points où celle-ci coupe les deux premières ont pour coordonnées

$$(M) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda\mu}, \\ y = \frac{\sqrt{p}}{2} \frac{\lambda + \mu}{\lambda\mu}, \\ z = \frac{\sqrt{q}}{2} \frac{\lambda - \mu}{\lambda\mu}; \end{cases}$$

$$(M') \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2\lambda'\mu'}, \\ y' = \frac{\sqrt{p}}{2} \frac{\lambda' + \mu'}{\lambda'\mu'}, \\ z' = \frac{\sqrt{q}}{2} \frac{\lambda' - \mu'}{\lambda'\mu'}. \end{cases}$$

La condition pour que MM' soit vu de $\omega(X, Y, Z)$ sous un angle droit est

$$(X - x)(X - x') + (Y - y)(Y - y') + (Z - z)(Z - z') = 0$$

ou

$$\begin{aligned} & (2\lambda\mu X - 1)(2\lambda'\mu' X - 1) \\ & + [\lambda\mu Y - \sqrt{p}(\lambda + \mu)][\lambda'\mu' Y - \sqrt{p}(\lambda' + \mu')] \\ & + [\lambda\mu Z - \sqrt{q}(\lambda - \mu)][\lambda'\mu' Z - \sqrt{q}(\lambda' - \mu')] = 0, \end{aligned}$$

qui doit avoir lieu quel que soit μ , d'où

$$\left\{ \begin{aligned} & 4\lambda\lambda' X^2 + (2\lambda Y - \sqrt{p})(2\lambda' Y - \sqrt{p}) \\ & \quad + (2\lambda Z + \sqrt{q})(2\lambda' Z + \sqrt{q}) = 0, \\ & 2(\lambda + \lambda')X + \lambda\sqrt{p}(2\lambda' Y - \sqrt{p}) + \lambda'\sqrt{p}(2\lambda Y - \sqrt{p}) \\ & \quad + \lambda\sqrt{q}(2\lambda' Z + \sqrt{q}) + \lambda'\sqrt{q}(2\lambda Z + \sqrt{q}) = 0, \\ & 1 - \lambda\lambda(p + q) = 0. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

La dernière condition montre qu'en général il n'existe aucun point ω répondant à la question; cette condition, qui exprime que Δ_1 et Δ'_1 sont orthogonales, pouvait être prévue en supposant la génératrice variable (G) à l'infini. Si elle est satisfaite, infinité de points $\omega(X, Y, Z)$ déterminés par les deux premières équations ci-dessus, lesquelles s'écrivent

$$\begin{aligned} 4\lambda\lambda'(X^2 + Y^2 + Z^2) - 2(\lambda + \lambda')(Y\sqrt{p} - Z\sqrt{q}) + p + q &= 0, \\ 2(\lambda + \lambda')X + 4\lambda\lambda'(Y\sqrt{p} + Z\sqrt{q}) - (\lambda + \lambda')(p - q) &= 0, \end{aligned}$$

et représentent un cercle (Γ_1), qui est le lieu de ω pour le système Δ_1, Δ'_1 .

L'équation du plan de ce cercle pouvant s'écrire, en tenant compte de (1),

$$2(\lambda + \lambda')X - \frac{4}{p+q}(Y\sqrt{p} + Z\sqrt{q}) - (\lambda + \lambda')(p - q) = 0,$$

ce plan passe, quelles que soient les génératrices Δ_1 et Δ'_1 , par la droite fixe

$$(D_1) \quad \begin{cases} 2X = p - q, \\ Y\sqrt{p} + Z\sqrt{q} = 0. \end{cases}$$

Au deuxième système de génératrices correspondent de même des cercles (Γ_2) dont les plans passent par la droite

$$(D_2) \quad \begin{cases} 2X = p - q, \\ Y\sqrt{p} - Z\sqrt{q} = 0. \end{cases}$$

Ces deux droites se coupent au point $I\left(\frac{p-q}{2}, 0, 0\right)$, symétrique du sommet O du paraboléide par rapport au milieu du segment FF' limité aux foyers des paraboles principales contenues dans les plans $\gamma O x$ et $z O x$.

La surface (Σ) lieu des cercles (Γ_1) et (Γ_2) a une équation qui résulte de l'élimination de λ et λ' entre

les équations du cercle (Γ_1) et la condition (1) :

$$(\Sigma) \quad \begin{vmatrix} 4(X^2 + Y^2 + Z^2) & -2(Y\sqrt{p} - Z\sqrt{q}) & p + q \\ 4(Y\sqrt{p} + Z\sqrt{q}) & 2X - (p - q) & 0 \\ p + q & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{aligned} & 4[2X - (p - q)](X^2 + Y^2 + Z^2) \\ & + 8(pY^2 - qZ^2) - (p + q)^2[2X - (p - q)] = 0. \end{aligned}$$

La puissance de I par rapport au cercle (Γ_1) ou à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{\lambda + \lambda'}{2\lambda\lambda'}(Y\sqrt{p} - Z\sqrt{q}) + \frac{p + q}{4\lambda\lambda'} = 0$$

ou

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + \frac{\lambda + \lambda'}{2}(p + q)(Y\sqrt{p} - Z\sqrt{q}) - \frac{(p + q)^2}{4} = 0$$

a pour valeur $(-pq)$; vérification analogue pour le cercle (Γ_2) : I est ainsi pour (Σ) un centre d'anallagmatie.

La surface (Σ) est une cyclide cubique, elle possède deux symétries par rapport aux plans xOy et xOz ; elle a en outre deux anallagmaties autres que celle de pôle I, et dont les pôles sont les points de contact de la surface avec les plans tangents menés par la droite à l'infini du plan $X = 0$, laquelle est sur (Σ) .

Ces points sont les points, autres que I, où Ox coupe (Σ) , c'est-à-dire les points J et K de cet axe qui ont pour abscisses $\pm \frac{p + q}{2}$. Tout plan perpendiculaire à l'axe Ox coupe (Σ) suivant une hyperbole s'il rencontre cet axe entre J et K, suivant une ellipse imaginaire s'il le rencontre en dehors du segment JK.

S'il passe en I, le plan coupe la surface suivant les droites D_1 et D_2 ; en J, il est tangent à (Σ) le long de

(193)

la droite

$$(L) \quad \begin{cases} X = \frac{p+q}{2}, \\ Y = 0, \end{cases}$$

qui est ainsi une génératrice singulière; de même, s'il passe en K , il est tangent le long de la droite

$$(L') \quad \begin{cases} X = -\frac{p+q}{2}, \\ Z = 0. \end{cases}$$

La trace de (Σ) sur le plan $\gamma O z$ est l'hyperbole équilatère

$$Y^2 - Z^2 + \frac{p^2 - q^2}{4} = 0.$$

Tout plan contenant l'une des droites (D_1) , (D_2) , (L) , (L') détermine un cercle sur (Σ) : en particulier le plan $Z = 0$ coupe la surface suivant (L') et suivant le cercle

$$(C') \quad \left(X - \frac{p}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{q^2}{4},$$

qui a pour centre F et qui passe en I . De même le plan $Y = 0$ la coupe suivant (L) et le cercle

$$(C) \quad \left(X + \frac{q}{2}\right)^2 + Z^2 = \frac{p^2}{4},$$

de centre F' et passant en I ; ces cercles ont respectivement IJ et IK pour diamètres. Dans la transformation de (Σ) en elle-même, par une inversion de pôle I et de puissance $(-pq)$, la droite (L) et le cercle (C) se permutent, ainsi que (L') et (C') .

Génération de (Σ) . — Imaginons qu'un plan mobile tourne autour de la droite (D_1) ; il coupe (L) , (L') , (C) et (C') en quatre points qui appartiennent à un cercle (Γ_1) dont le lieu est la surface; un plan mobile

autour de (D_2) donne une génération analogue avec les cercles (Γ_2) .

Par tout point M de (Σ) passent ainsi un cercle (Γ_1) et un cercle (Γ_2) qui se coupent en un second point M' de IM , tel que $\overline{IM} \cdot \overline{IM'} = -pq$; toute sphère contenant un cercle d'une des familles coupe (Σ) suivant un cercle de l'autre famille, et ces deux cercles ont en commun deux points tels que M et M' , de sorte que la sphère est bitangente à (Σ) . Les axes des cercles (Γ_1) et (Γ_2) sont les génératrices des deux systèmes de (Π) .

Revenons aux génératrices Δ_1 et Δ'_1 , et soit OO' leur perpendiculaire commune, les points O et O' où elle les coupe appartiennent au cercle (Γ_1) dont l'axe est la génératrice du parabolôïde, de même espèce que Δ_1 et Δ'_1 , appartenant au plan équidistant de Δ_1 et Δ'_1 ; on en conclut que (Σ) est la surface anallagmatique enveloppe des sphères coupant orthogonalement la sphère imaginaire de centre I et de rayon $\sqrt{-pq}$, avec le parabolôïde comme surface déférente; cela se vérifie par un calcul simple.

Les points O et O' sont évidemment dans le plan de Monge du parabolôïde qui a ainsi en commun, avec (Σ) , l'hyperbole, située dans ce plan, lieu des points où se croisent deux génératrices rectangulaires; nous verrons plus loin que le reste de l'intersection des deux surfaces est une biquadratique sphérique imaginaire.

L'anallagmatie de pôle K , et de module $p(p+q)$, donne un mode de génération plus simple : un plan variable contenant (L') rencontre (C) et (L) en N et N' , et le cercle de diamètre NN' qui est situé dans ce plan, et que nous nommerons le cercle (Λ) , a pour lieu géométrique la surface cubique.

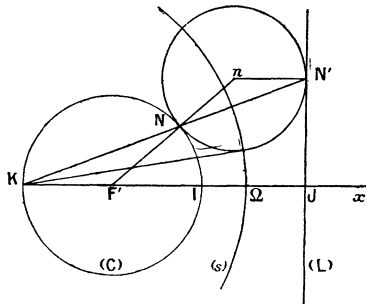
Génération analogue, avec (C') et (L') , à l'aide des cercles (Λ') .

Si n est le centre, situé dans le plan xOz , d'une sphère contenant le cercle (Λ) et tangente à (L) , cette sphère est orthogonale à la sphère (S) de centre K et de rayon $\sqrt{p(p+q)}$, et son centre décrit la parabole (π) située dans le même plan xOz , et ayant F pour sommet et F' pour foyer, et elle a pour enveloppe (Σ) avec laquelle elle se raccorde suivant (Λ) . Les cercles (Λ) constituent une famille de lignes de courbure de (Σ) .

Au mode de génération par les cercles (Λ') , correspond une famille de sphères, orthogonales à la sphère de centre J et de rayon $\sqrt{q(p+q)}$, et ayant leurs centres sur la parabole (π') focale de la précédente; les cercles de raccordement de ces sphères avec (Σ) forment la seconde famille de lignes de courbure.

La surface (Σ) est l'inverse d'un tore : Soient (s) le cercle trace de (S) sur le plan xOz , Ω et Ω' les points

Fig. 3.



où il coupe Ox , Ω étant supposé entre I et J . Transformons l'ensemble (C) , (L) , par une inversion de pôle Ω et de module $\overline{\Omega I} \cdot \overline{\Omega K}$: le cercle (C) se transforme en lui-même, et si J' est le point inverse de J , un calcul fort simple montre que $\Omega J' = KI$; par conséquent (C)

et (L) se transforment en deux cercles égaux (C) et (L_1) . Le cercle $\Omega NN'$, tangent en Ω à Ox , a pour inverse une droite $N_1 N'_1$ parallèle à Ox ; la droite KNN' a pour inverse le cercle $\Omega IN_1 N'_1$; ΩI et $N_1 N'_1$ ont le même axe, par rapport auquel les cercles (C) et (L_1) sont symétriques; finalement, le cercle (Λ) se transforme en le cercle (Λ_1) décrit sur $N_1 N'_1$ comme diamètre dans un plan perpendiculaire au plan xOz , lequel cercle engendre un tore dont la méridienne est l'ensemble des cercles (C) et (L_1) : ce tore (T) est l'inverse de (Σ) ; le point Ω appartient au petit cercle équatorial du tore.

Avec Ω' , on aurait eu un tore dont le grand cercle équatorial eût passé en ce point. La surface (Σ) peut ainsi être transformée en un tore de quatre manières différentes.

Inversement, en transformant un tore par inversion par rapport à un point d'un des cercles équatoriaux, on a une surface (Σ) .

Cette surface cubique n'est donc autre chose qu'une *cyclide de Dupin* particulière; le mode de génération à l'aide des cercles (Λ) est un cas particulier de celui-ci, qui a été signalé par M. Guichard pour une cyclide de Dupin quelconque :

Étant donnés deux cercles d'un plan considérés comme inverses l'un de l'autre, si l'on joint un point variable de l'un à son inverse sur l'autre, le cercle ayant pour diamètre le segment de droite obtenu, et situé dans un plan perpendiculaire au plan des cercles, engendre une cyclide de Dupin.

D'ailleurs, en transformant avec un point quelconque de Ox pour pôle, la surface (Σ) et le mode de génération par les cercles (Λ) , on aurait une cyclide

de Dupin générale engendrée comme il vient d'être dit.

Des propriétés du tore (T), on déduit sans peine celles de (Σ), que nous nous contenterons d'énoncer :

Droites de (Σ). — Les seules droites de cette surface sont, outre la droite à l'infini des plans perpendiculaires à Ox , les quatre droites (L), (L'), (D₁), (D₂) : les deux premières sont les inverses du cercle méridien et du cercle équatorial de (T) qui se croisent en Ω , et les deux autres les inverses des deux cercles qui se croisent en Ω et qui appartiennent aux deux plans bitangents au tore qu'on peut faire passer par ce point.

Cercles de (Σ). — Ce sont les cercles des quatre familles que nous avons signalées : les cercles (Λ) sont les transformés des parallèles du tore, les cercles (Λ_1) les transformés des méridiens, les cercles (Γ_1) et (Γ_2) les transformés des cercles situés dans les plans bitangents au tore.

Par tout point M de (Σ) passe un cercle de chaque famille : un cercle (Λ) et un cercle (Λ') qui sont orthogonaux et qui n'ont que ce point commun M, un cercle (Γ_1) et un cercle (Γ_2) qui se coupent en outre au point M' inverse de M dans l'anallagmatic de pôle I, et appartiennent à la sphère bitangente à (Σ) en M et M'.

Les seules autres coniques tracées sur (Σ) sont des hyperboles situées dans les plans sécants perpendiculaires à Ox et coupant cette droite entre J et K.

Biquadratiques de (Σ). — Toute quadrique passant par un cercle ou une conique de la surface la coupe en outre suivant une biquadratique de première espèce. De même toute quadrique qui contient deux des cinq droites de (Σ) situées dans un même plan.

Toute quadrique passant par deux droites, non en

même plan, prises parmi les quatre droites à distance finie, détermine sur (Σ) une courbe gauche du quatrième ordre de seconde espèce, par laquelle on ne peut faire passer que cette seule quadrique.

Une quadrique contenant une conique non circulaire de (Σ) coupe en outre cette surface suivant une biquadratique qui a quatre points communs avec le cercle de l'infini, donc suivant une *biquadratique sphérique*, et réciproquement.

Anallagmaties. — On sait qu'une cyclide cubique quelconque est anallagmatique de cinq manières, les déférentes étant des quadriques homofocales. Ici, nous avons affaire à une cyclide particulière qui possède une seule anallagmatie générale, avec I pour pôle et le paraboloidé comme surface déférente, et à laquelle correspondent les cercles (Γ_1) et (Γ_2) dont les axes sont les génératrices du paraboloidé. Les quatre autres anallagmaties se réduisent en quelque sorte à deux anallagmaties doubles, dans lesquelles les sphères enveloppées se raccordent avec (Σ) le long des cercles de courbure, les déférentes se réduisant aux paraboles (π) et (π') , focales du paraboloidé.

Les normales à (Σ) s'appuient sur ces deux paraboles.

Intersection de (Σ) et du paraboloidé. — Un calcul aisé permet de mettre l'équation de (Σ) sous la forme

$$4(2X + p - q) \left[\left(X - \frac{p - q}{2} \right)^2 + Y^2 + Z^2 + pq \right] \\ + 8(qY^2 - pZ^2 - 2pqX) = 0;$$

l'intersection de cette surface et du paraboloidé se compose donc de la section plane contenue dans le plan polaire de I

$$2X + p - q = 0$$

et d'une biquadratique appartenant à la sphère imaginaire de centre I

$$\left(X - \frac{p-q}{2} \right)^2 + Y^2 + Z^2 + pq = 0.$$

(Σ) *considérée comme transformée du paraboloïde.* — Étant donnée une génératrice Δ du paraboloïde, il existe un système et un seul de génératrices de même espèce qu'elle, Δ_1 et Δ'_1 , orthogonales, et équidistantes de Δ ; on peut s'en rendre compte en considérant le contour apparent de la quadrique par rapport au plan directeur parallèle à ces génératrices, qui est une parabole de foyer I et de même sommet que le paraboloïde; à ces génératrices Δ_1 et Δ'_1 correspond un cercle (Γ_1) dont Δ est l'axe; inversement à un cercle (Γ_1) correspond une génératrice Δ .

Par tout point M du paraboloïde passent deux génératrices auxquelles correspondent un cercle (Γ_1) et un cercle (Γ_2); ces cercles ont deux points communs m et m' , inverses l'un de l'autre sur (Σ) dans l'anallagmatie de pôle I; ces deux points sont, comme on voit, symétriques par rapport au plan tangent en M au paraboloïde.

Addition à la quatrième partie. — M. Labrousse, professeur au lycée Saint-Louis, a bien voulu me signaler les propriétés suivantes, sur lesquelles je reviendrai prochainement :

1° Si θ décrit sur (H) une biquadratique sphérique (h) de centre O, le point orthoptique ω décrit sur la surface (S_H) une biquadratique sphérique (h'); si (h) est sur la sphère de Monge, (h) et (h') coïncident;

2° Si l'on considère les cônes du second degré de

sommet O qui ont pour directrices les biquadratiques (h') , les coniques sphériques déterminées par ces cônes sur la sphère de Monge sont identiques aux traces, sur la même sphère, des quadriques homofocales à (H) ;

3° Dans le cas particulier où (H) est de révolution, pour que les points orthoptiques ω, ω' relatifs à deux génératrices Δ et Δ' soient réels, il faut et il suffit que le point commun aux projections de ces droites sur le plan xOy soit extérieur au cercle

$$x^2 + y^2 - (2a^2 + c^2) = 0.$$