

R. ALEZAIS

**Sur les progressions arithmétiques
disposées en escalier**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 64-70

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__64_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[A 1 a]

**SUR LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES
DISPOSÉES EN ESCALIER;**

PAR M. R. ALEZAIS.

Un problème élémentaire d'Arithmétique a attiré l'attention de M. Haton de la Goupillière qui lui a consacré deux Notes dans les *Comptes rendus* de

l'Académie. Voici quelques compléments sur la première de ces Notes (*Sur une propriété des progressions arithmétiques*, 23 novembre 1914) :

Avec M. Haton de la Goupillière, je dirai que les termes d'une série sont disposés en *escalier* ou forment un escalier, quand ils sont écrits sur des lignes superposées dont la plus élevée contient les p premiers termes de la série, la deuxième les $p + q$ suivants, la troisième les $p + 2q$ suivants, et ainsi de suite; j'appellerai p le *palier* et q la *marche*. Je dirai aussi que les $p + (n - 1)q$ termes de la $n^{\text{ième}}$ ligne à partir du haut forment la $n^{\text{ième}}$ assise.

Le problème est le suivant : *Le premier terme a d'une progression arithmétique étant un entier positif, nul ou négatif et sa raison r un entier positif, on cherche à déterminer les entiers a, r, p, q de manière que la somme des termes de la $n^{\text{ième}}$ assise soit, quel que soit n , le cube d'un entier N .*

On trouve qu'il ne peut y avoir de solution que si l'on suppose $N = c[p + (n - 1)q]$, où c est un entier quelconque indépendant de n . On voit aussi que si a_1, r_1 et a_c, r_c sont des valeurs de a et r relatives à $c = 1$ et à une valeur quelconque de c , on a

$$a_c = c^3 a_1, \quad r_c = c^3 r_1.$$

Il ne reste donc qu'à étudier le cas où

$$N = p + (n - 1)q,$$

c'est-à-dire où la somme des termes de la $n^{\text{ième}}$ assise est le cube du nombre des termes de cette assise. On trouve alors que les conditions du problème sont exprimées par les formules

$$(1) \quad r = 2q, \quad a = p^2 - pq + q,$$

qui fournissent toujours une solution unique quand p et q sont des entiers donnés.

Le problème inverse n'est pas toujours possible. La première équation (1) montre que r doit être pair et M. Haton de la Goupillière n'a même considéré que le cas où r est multiple de 4; mais cette dernière restriction n'est pas nécessaire. A toute valeur entière et positive de q (et par suite à toute valeur paire de r) correspondent des systèmes de valeurs de a et de p en nombre infini qui constituent des solutions; mais, et ceci est la seconde des remarques que j'ai à présenter, si l'on convient de dire que deux escaliers ne sont pas distincts ou qu'ils sont équivalents, quand l'un se déduit de l'autre par le seul retranchement de quelques-unes des assises supérieures, nous allons voir qu'à chaque valeur de q correspondent exactement q escaliers distincts et qu'on peut leur donner respectivement pour palier 1, 2, ..., q .

On tire de la seconde équation (1)

$$p = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2} - 1\right)^2 + a - 1}.$$

Posons

$$\left(\frac{q}{2} - 1\right)^2 + a - 1 = \left(\frac{q}{2} - 1 + R\right)^2;$$

il en résultera

$$a = R^2 + (q - 2)R + 1$$

et

$$p = \frac{q}{2} \pm \left(\frac{q}{2} - 1 + R\right);$$

d'où les deux solutions

$$p_1 = q - 1 + R, \quad p_2 = 1 - R,$$

et l'on voit que, pour que a et p soient entiers, il faut et il suffit que R le soit; il y a donc bien une infinité de solutions.

Notons toutefois qu'il suffit, pour avoir toutes les solutions, de donner à R les valeurs entières supérieures ou égales à la racine de l'équation $p_1 = p_2$, c'est-à-dire au nombre

$$R = -\left(\frac{q}{2} - 1\right).$$

En effet, si nous prenons des entiers équidistants de ce nombre, à savoir

$$\lambda \quad \text{et} \quad -\lambda - 2\left(\frac{q}{2} - 1\right) = -(\lambda + q - 2),$$

et si nous indiquons par des indices les valeurs correspondantes de a et de p , nous aurons

$$\begin{aligned} a_{-(\lambda+q-2)} &= (\lambda + q - 2)^2 - (q - 2)(\lambda + q - 2) + 1 \\ &= \lambda^2 + (q - 2)\lambda + 1 = a_\lambda, \end{aligned}$$

$$(p_1)_{-(\lambda+q-2)} = q - 1 - \lambda - q + 2 = 1 - \lambda = (p_2)_\lambda,$$

$$(p_2)_{(\lambda+q-2)} = 1 + \lambda + q - 2 = q - 1 + \lambda = (p_1)_\lambda.$$

Ainsi a reste le même et p_1 et p_2 ne font que s'échanger.

Il faut évidemment n'admettre pour p que des entiers positifs; nous allons voir qu'en tenant compte de ce fait et en donnant à R les valeurs entières supérieures ou égales à $-\left(\frac{q}{2} - 1\right)$, mais inférieures ou égales à 1, on obtient exactement q escaliers et que tous les autres leur sont équivalents.

D'abord on obtient q escaliers. En effet, posons suivant la parité $q = 2k + 1$ ou $q = 2k + 2$. Il y a alors k entiers nuls ou négatifs supérieurs à $-\left(\frac{q}{2} - 1\right)$ et chacun d'eux donne à p_1 et à p_2 des valeurs positives et distinctes; ils fournissent donc $2k$ solutions. Pour $R = 1$, p_2 est nul, mais p_1 est positif et en fournit

une $(2k+1)^{\text{ième}}$. Enfin, quand q est pair, $-\left(\frac{q}{2}-1\right)$ est entier et ce nombre donne à p_1 et à p_2 une même valeur positive qui fournit la $q^{\text{ième}}$ solution relative à ce cas.

Pour ces q premiers escaliers, je représenterai la valeur de R par λ et je les appellerai les *escaliers* λ . L'entier λ doit prendre des valeurs décroissantes à partir de 1 si l'escalier dépend de p_1 , à partir de 0 s'il dépend de p_2 ; dans les deux cas, ses valeurs doivent descendre jusqu'à $-(k-1)$ si $q=2k+1$, mais l'une des deux suites de valeurs doit aller jusqu'à $-k$, si $q=2k+2$. On vérifie facilement que, pour ces valeurs de λ , les entiers p_1 et p_2 prennent dans leur ensemble les valeurs 1, 2, ..., q .

Établir que tout autre escalier est équivalent à l'un des escaliers λ , revient à prouver que, pour toute valeur de R entière et supérieure à 1, le premier terme $a=R^2+(q-2)R+1$ est égal au premier terme d'une des assises d'un escalier λ . Pour celui-ci, le premier terme de la série est $\lambda^2+(q-2)\lambda+1$, et le premier terme de la $n^{\text{ième}}$ assise, occupant dans la série le rang

$$\begin{aligned} & (n-1)p+(1+2+\dots+n-2)q+1 \\ & = (n-1)p+\frac{(n-1)(n-2)}{2}q+1, \end{aligned}$$

a pour valeur

$$\lambda^2+(q-2)\lambda+1+\left[(n-1)p+\frac{(n-1)(n-2)}{2}q\right]2q.$$

Soit d'abord

$$p=p_1=q-1+\lambda;$$

on est alors ramené à

$$\begin{aligned} & R^2+(q-2)R \\ & = \lambda^2+(q-2)\lambda \\ & + \left[(n-1)(q-1+\lambda)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}q\right]2q, \end{aligned}$$

(69)

ou

$$\begin{aligned} & R^2 + (q - 2)R - \lambda^2 + 2\lambda \\ & + [2(n - 1) - (2n - 1)\lambda]q - n(n - 1)q^2 = 0; \end{aligned}$$

équation du deuxième degré en R dont les solutions sont

$$R = \frac{2 - q \pm [(2n - 1)q + 2(\lambda - 1)]}{2}.$$

Puisque nous n'avons à considérer que les valeurs positives de R, il suffit de prendre le signe +, ce qui donne $R = (n - 1)q + \lambda$; d'où, n_1 étant la solution de cette équation,

$$n_1 = \frac{R - \lambda}{q} + 1.$$

Soit ensuite

$$p = p_2 = 1 - \lambda.$$

L'équation est alors

$$\begin{aligned} & R^2 + (q - 2)R \\ & = \lambda^2 + (q - 2)\lambda + \left[(n - 1)(1 - \lambda) + \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}q \right] 2q, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} & R^2 + (q - 2)R - \lambda^2 + 2\lambda \\ & - [2(n - 1) - (2n - 3)\lambda]q - (n - 1)(n - 2)q^2 = 0, \end{aligned}$$

et ses racines sont

$$R = \frac{2 - q \pm [(2n - 3)q - 2(\lambda - 1)]}{2}.$$

En prenant le signe +, on a $R = (n - 2)q - \lambda + 2$, et en désignant par n_2 la solution en n ,

$$n_2 = \frac{R + \lambda - 2}{q} + 2.$$

Pour qu'un escalier R soit équivalent à un escalier λ , il faut et suffit que R rende entier soit n_1 , soit n_2 pour

(70)

l'une des valeurs que λ peut prendre,

$$\begin{aligned} n_1 \text{ est entier si l'on a } R &\equiv \lambda \pmod{q}, \\ n_2 \text{ est entier si l'on a } R &\equiv -\lambda + 2 \pmod{q}. \end{aligned}$$

Quand λ parcourt les séries de valeurs indiquées plus haut, on trouve que λ et $-\lambda + 2$ parcourent dans leur ensemble un système complet de restes suivant le module q ; quel que soit R , il sera donc possible de déterminer λ de sorte que n_1 ou n_2 soit entier.