

M. D'OCAGNE

**Démonstration géométrique d'un théorème
de Cornu sur les caustiques**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15
(1915), p. 508-510

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__508_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[O'2qβ]

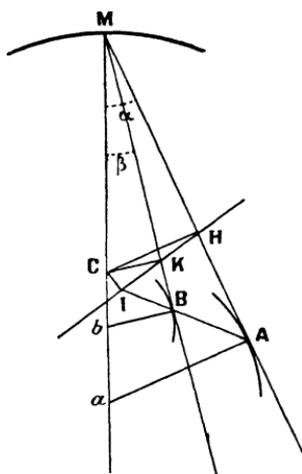
**DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UN THÉORÈME DE CORNU
SUR LES CAUSTIQUES;**

PAR M. M. D'OCAGNE.

Cornu a donné (*N. A.*, 1863, p. 311) un théorème d'une très grande élégance pour la détermination point par point des caustiques par réfraction, comprenant comme cas particulier celles par réflexion. Ce théorème s'énonce ainsi :

Si le rayon incident MA et le rayon réfracté MB,

se coupant au point M de la courbe dirimante, auquel correspond le centre de courbure C, touchent



respectivement leurs enveloppes aux points A et B, la droite AB passe par la projection I du centre de courbure C sur la droite qui joint les projections H et K de ce même centre sur les deux rayons.

Ce théorème semble peu connu, et cela tient peut-être à ce que la voie analytique par laquelle son auteur l'a obtenu manque un peu de simplicité. Nous allons faire voir ici qu'il est très facile de l'établir par un procédé purement géométrique.

Si l'indice de réfraction est n , on a

$$(1) \quad \sin \beta = n \sin \alpha,$$

qui donne immédiatement

$$(2) \quad n = \frac{CK}{CH}.$$

En différentiant (1) on a

$$\cos \beta \, d\beta = n \cos \alpha \, d\alpha,$$

ou, en tenant compte de (2),

$$CH \cos \beta \, d\beta = CK \cos \alpha \, d\alpha.$$

Mais le quadrilatère MCKH étant inscriptible, les angles CKI et CHI sont respectivement égaux à α et β , et il vient

$$(3) \quad IH \, d\beta = IK \, d\alpha.$$

Maintenant, si ds est l'arc infiniment petit décrit par le point M, une formule bien connue de Mannheim donne

$$d\alpha = ds \left(\frac{1}{MC} - \frac{1}{Ma} \right), \quad d\beta = ds \left(\frac{1}{MC} - \frac{1}{Mb} \right),$$

a et b étant les points où les normales en A et B aux deux enveloppes coupent la normale MC à la courbe directrice. On en déduit

$$\frac{aM}{aC} \, d\alpha = \frac{bM}{bC} \, d\beta$$

ou encore, puisque Aa et Bb sont respectivement parallèles à HC et KC,

$$(4) \quad \frac{AM}{AH} \, d\alpha = \frac{BM}{BK} \, d\beta.$$

Multipliant (3) et (4) membre à membre, on obtient

$$\frac{AM \cdot BK \cdot IH}{AH \cdot BM \cdot IK} = 1,$$

d'où résulte que les points A, B, I, pris sur les côtés du triangle MHK, sont bien en ligne droite.