Nouvelles annales de mathématiques

M. d'Ocagne

Démonstration géométrique d'un théorème de Cornu sur les caustiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 508-510

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__508_1>

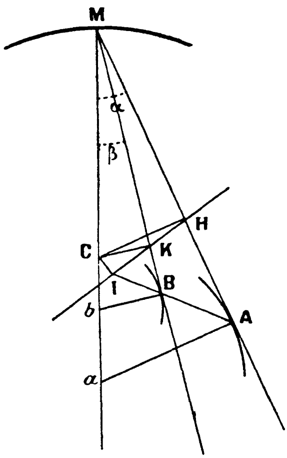
[$O^1 2 q \beta$]

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UN THÉORÈME DE CORNU SUR LES CAUSTIQUES;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Cornu a donné (*N. A.*, 1863, p. 311) un théorème d'une très grande élégance pour la détermination point par point des caustiques par réfraction, comprenant comme cas particulier celles par réflexion. Ce théorème s'énonce ainsi :

Si le rayon incident MA *et le rayon réfracté* MB, *se coupant au point* M *de la courbe dirimante, auquel correspond le centre de courbure* C, *touchent*



respectivement leurs enveloppes aux points A *et* B, *la droite* AB *passe par la projection* I *du centre de courbure* C *sur la droite qui joint les projections* H *et* K *de ce même centre sur les deux rayons.*

Ce théorème semble peu connu, et cela tient peut-être à ce que la voie analytique par laquelle son auteur l'a obtenu manque un peu de simplicité. Nous allons faire voir ici qu'il est très facile de l'établir par un procédé purement géométrique.

Si l'indice de réfraction est n, on a

(1) $$\sin\beta = n \sin\alpha,$$

qui donne immédiatement

(2) $$n = \frac{\mathrm{CK}}{\mathrm{CH}}.$$

En différentiant (1) on a

$$\cos\beta\, d\beta = n \cos\alpha\, d\alpha,$$

ou, en tenant compte de (2),

$$\mathrm{CH} \cos\beta\, d\beta = \mathrm{CK} \cos\alpha\, d\alpha.$$

Mais le quadrilatère MCKH étant inscriptible, les angles CKI et CHI sont respectivement égaux à α et β, et il vient

(3) $$\mathrm{IH}\, d\beta = \mathrm{IK}\, d\alpha.$$

Maintenant, si ds est l'arc infiniment petit décrit par le point M, une formule bien connue de Mannheim donne

$$d\alpha = ds\left(\frac{1}{\mathrm{MC}} - \frac{1}{\mathrm{M}a}\right), \qquad d\beta = ds\left(\frac{1}{\mathrm{MC}} - \frac{1}{\mathrm{M}b}\right),$$

a et b étant les points où les normales en A et B aux deux enveloppes coupent la normale MC à la courbe dirimante. On en déduit

$$\frac{a\mathrm{M}}{a\mathrm{C}}\, d\alpha = \frac{b\mathrm{M}}{b\mathrm{C}}\, d\beta$$

ou encore, puisque Aa et Bb sont respectivement parallèles à HC et KC,

(4) $$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AH}}\, d\alpha = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BK}}\, d\beta.$$

Multipliant (3) et (4) membre à membre, on obtient

$$\frac{\mathrm{AM.BK.IH}}{\mathrm{AH.BM.IK}} = 1,$$

d'où résulte que les points A, B, I, pris sur les côtés du triangle MHK, sont bien en ligne droite.