Nouvelles annales de mathématiques

Dumont

Note sur la symétrie dans les surfaces algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 463-472

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__463_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[$M^2 2f$]

NOTE SUR LA SYMÉTRIE DANS LES SURFACES ALGÉBRIQUES;

Par M. DUMONT.

Indépendamment de la symétrie par rapport à un plan étudié précédemment ici (voir *Nouvelles Annales*, septembre 1896, p. 403) par M. Mangeot, et de la symétrie par rapport à un centre, on peut considérer la symétrie par rapport à un axe.

Nous donnerons ici au mot *axe de symétrie* un sens plus général que celui qu'on lui attribue ordinairement, savoir le sens adopté par Bravais et par la Cristallographie.

Une droite sera dite *axe de symétrie binaire, ternaire, quaternaire, quinaire, senaire* d'une surface, suivant que la surface pourra coïncider avec elle-même après une rotation de 180°, de 120°, de 90°, de 72°, de 60°. Un axe de symétrie quaternaire ou senaire est évidemment en même temps axe binaire.

I. — Surfaces du troisième ordre.

L'équation générale peut s'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(Az^3 + 3Bz^2 + 3Cz + D)\\ &\quad + (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3)\\ &\quad + 3z(mx^2 + 2pxy + qy^2)\\ &\quad + 3z^2(hx + ky)\\ &\quad + 3(rx^2 + 2sxy + ty^2)\\ &\quad + 6z(ux + vy) + 3(fx + gy) = 0.\end{aligned}\right.$$

Supposons que la surface ait un axe de symétrie et qu'on ait pris cet axe pour Oz.

Nous remarquerons d'abord que, par une rotation autour de Oz correspondant à l'indice de symétrie de cet axe, il faut que chacun des sept groupes de termes mis en évidence dans l'équation (1) se reproduise lui-même, car il ne peut en reproduire aucun autre.

Il en résulte que la symétrie quinaire ne peut se présenter, car les groupes

$$ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3,\quad hx+ky,\quad ux+vy,\quad fx+gy,$$

égalés à zéro, représentant, le premier trois droites, les trois autres une droite, ne peuvent présenter cette symétrie. Ces groupes doivent donc disparaître. Quant aux troisième et cinquième groupes qui, égalés à des constantes, représentent des coniques, ils ne peuvent subsister que si les deux coniques sont des cercles. L'équation de la surface (coordonnées rectangulaires) se réduit alors à la forme

$$\mathrm{A}z^3+3\mathrm{B}z^2+3\mathrm{C}z+\mathrm{D}+3mz(x^2+y^2)+3r(x^2+y^2)=0.$$

La surface est de révolution et, pour une telle surface, on peut dire que l'indice de symétrie est indéterminé.

Considérons les autres symétries.

1° Oz *axe binaire*. — Une rotation de 180° laisse intacts les premier, troisième et cinquième groupes, tandis qu'elle change le signe des quatre autres; donc tous les groupes ne peuvent subsister et l'équation doit se réduire à l'une des deux formes

$$(\beta_1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}z^3+3\mathrm{B}z^2+3\mathrm{C}z+\mathrm{D}\\ &\quad+3z(mx^2+2pxy+qy^2)\\ &\quad+3(rx^2+2sxy+ty^2)=0.\end{aligned}\right.$$

$$(\beta_2)\qquad \left\{\begin{aligned} &ax^3+3bx^2y+3cxy^2\\ &\quad+dy^3+3z^2(hx+ky)\\ &\quad+6z(ux+vy)+3(fx+gy)=0.\end{aligned}\right.$$

La forme (β_1) peut, dans certains cas, représenter une surface à plan de symétrie passant par Oz, savoir lorsque par une rotation des axes autour de Oz, on peut faire disparaître à la fois les deux termes du premier degré en x ou y. Mais on voit qu'en même temps l'équation est privée des termes du premier degré en y ou x, de sorte qu'il ne peut y avoir un plan de symétrie sans qu'il y en ait un second passant aussi par Oz, ce que l'on prévoit aisément.

Les deux plans dont il s'agit sont des plans de symétrie proprement dite si les axes sont rectangulaires, des plans de symétrie oblique analogues aux plans diamétraux des quadriques si les axes sont obliques.

La forme (β_2) ne peut au contraire représenter une surface à plan de symétrie passant par Oz sans se décomposer.

Mais elle peut représenter des surfaces ayant $z = 0$ pour plan de symétrie, tandis que de telles surfaces ne peuvent être représentées par (β_1), car si l'on avait à la fois $A = C = 0$, $m = p = q = 0$ la surface ne serait plus du troisième degré.

La forme (β_2) représente une surface à plan de symétrie $z = 0$, si $u = v = 0$, et l'on voit qu'alors la surface a l'origine pour centre de symétrie.

2° Oz *axe ternaire*. — Pour qu'une rotation de 120° reproduise l'équation (1), il faut que les quatrième, sixième et septième groupes de termes disparaissent; que, de plus, les groupes $mx^2 + 2pxy + qy^2$ et $px^2 + 2sxy + ty^2$, égalés à des constantes, représentent des cercles et enfin que le deuxième groupe égalé à zéro représente trois droites formant entre elles des angles de 60°. Comme on peut supposer les axes Ox et Oy orientés de manière que l'une de ces droites ait la direction de l'axe des x, l'équation se réduit à la forme

$$(t)\quad \left\{ \begin{aligned} &Az^3+3Bz^2+3Cz+D+dy(y^2-3x^2)\\ &\qquad +3mz(x^2+y^2)+3r(x^2+y^2)=0 \end{aligned} \right. \quad (^1).$$

Ainsi, l'on voit que dans le cas de la symétrie ternaire on a nécessairement trois plans de symétrie passant par Oz (qui sont actuellement le plan zOy et deux autres inclinés de 60° ont zOy).

Si $A=C=m=0$, on a en outre le plan de symétrie $z=0$.

Si c'est le paramètre A qui est nul, on a les surfaces de révolution et il aisé de voir qu'on les a toutes.

Ainsi, il suffit d'ajouter *une seule* condition pour passer des surfaces à symétrie ternaire aux surfaces de révolution.

On peut remarquer immédiatement, ici, que le groupe $y(y^2-3x^2)$, égalé à une constante, représentant une cubique plane qui a la symétrie ternaire et non la symétrie senaire, les surfaces du troisième ordre n'ont jamais la symétrie senaire, à moins d'être de révolution.

Si l'axe de symétrie ternaire est la droite d'intersection des plans bissecteurs du trièdre $Oxyz$, l'équation de la surface a la forme [2]

$$\begin{aligned} &A(x^3+y^3+z^3)+3B(x^2y+y^2z+z^2x)\\ &\quad +3C(xy^2+yz^2+zx^2)+6Dxyz\\ &\quad +3E(x^2+y^2+z^2)+6F(xy+yz+zx)\\ &\qquad\qquad +3G(x+y+z)+H=0. \end{aligned}$$

3° Oz *axe quaternaire*. — On trouve par des rema-

---

(1) Il est aisé de voir que cette équation est, au fond, la même que celle qui est donnée (*Nouvelles Annales*, 1896: p. 416) car on peut toujours de l'équation (t) faire disparaître le terme $3zB^2$.

(2) On vérifie aisément que les trois plans bissecteurs sont plans de symétrie.

niements analogues l'équation des surfaces de révolution. Ainsi, l'axe de symétrie ne peut être quaternaire sans être de révolution, c'est-à-dire d'indice indéterminé.

II. — Surfaces du quatrième ordre.

L'équation générale peut s'écrire

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E)\\
&\quad + (ax^4 + 4bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4)\\
&\quad + z(4fx^3 + 12gx^2y + 12hxy^2 + 4ky^3)\\
&\quad + z^2(6lx^2 + 12mxy + 6ny^2) + z^3(4px + 4qy)\\
&\quad + (4rx^3 + 12sx^2y + 12txy^2 + 4uy^3)\\
&\quad + z(12Fx^2 + 24Gxy + 12Hy^2)\\
&\quad + z^2(12Lx + 12My) + (12Nx^2 + 24Pxy + 12Qy^2)\\
&\qquad\qquad + 6z(Rx + Sy) + 4Tx + 4Vy = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Chacun des onze groupes dont se compose le premier membre de cette équation doit se reproduire par une rotation autour de l'axe de symétrie, s'il y en a un, la rotation ayant la valeur indiquée par l'indice de l'axe.

Il en résulte, comme dans le cas précédent, que la symétrie quinaire ne peut se présenter ici, à moins que la surface ne soit de révolution.

Considérons donc les autres symétries, Oz étant encore l'axe.

1° *Symétrie binaire.* — Pour qu'une rotation de 180° fasse coïncider la surface avec elle-même, l'équation doit se réduire à

$$
(\beta_1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E\\
&\quad + 6z^2(lx^2 + 2mxy + ny^2)\\
&\quad + (ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4)\\
&\quad + 12z(Fx^2 + 2Gxy + Hy^2)\\
&\qquad\qquad + 12(Nx^2 + 2Pxy + Qy^2 = 0
\end{aligned}
\right.
$$

ou à

$$
(\beta_2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&4z(fx^3 + 3gx^2y + 3hxy^2 + ky^3)\\
&\quad + 4(rx^3 + 3sx^2y + 3txy^2 + vy^3)\\
&\quad + 4z^3(px + qy) + 12z^2(Lx + My)\\
&\qquad + 6z(Rx + Sy) + 4(Tx + Vy) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Comme dans le cas des surfaces du troisième ordre, la forme (β_2) ne peut représenter des surfaces à plan de symétrie, passant par Oz, sans se décomposer. Mais elle peut en représenter qui aient $z = 0$ pour plan de symétrie, savoir si l'on a

$$f = g = h = k = p = q = \mathrm{R} = \mathrm{S} = 0.$$

L'origine est alors centre de symétrie.

Mais, contrairement à ce qui a lieu pour le troisième ordre, la forme (β_1) peut aussi représenter, sans qu'il y ait dégénérescence, des surfaces ayant $z = 0$ pour plan de symétrie. Il suffit que $\mathrm{B} = \mathrm{D} = \mathrm{F} = \mathrm{G} = \mathrm{A} = 0$.

La surface (β_1) aura un plan de symétrie passant par Oz, si l'on a (ou si l'on peut avoir par une rotation convenable) $m = b = d = \mathrm{G} = \mathrm{P} = 0$.

On a encore un plan de symétrie perpendiculaire au premier (particularité indépendante du degré de la surface et qui se présente pour toute figure ayant un axe de symétrie binaire et un plan de symétrie passant par cet axe).

2° *Symétrie ternaire.* — On voit que les cinquième, huitième, dixième et onzième groupes de termes doivent disparaître, que de plus les quatrième, septième et neuvième groupes doivent représenter des cercles nuls ainsi que le second qui est alors de la forme $(x^2 + y^2)$. L'équation se réduit alors à

$$(\tau)\left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}z^4 + 4\mathrm{B}z^3 + 6\mathrm{C}z^2 + 4\mathrm{D}z + \mathrm{E}\\ &\quad + a(x^2+y^2)^2 + 4f\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3\,z + 6lz^2(x^2+y^2)\\ &\quad + 4r\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2\mathrm{Y}_3 + 12\mathrm{F}(x^2+y^2)z + 12\mathrm{N}(x^2+y^2) = 0.\end{aligned}\right.$$

où $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3 = 0$ et $\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2\mathrm{Y}_3 = 0$ représentent deux groupes de trois droites passant par l'origine et faisant entre elles des angles de 60°, mais qui ne sont pas nécessairement orientés de la même manière, de sorte que l'on ne peut pas, en général, les ramener à la fois à la forme $y(y^2 - 3x^2)$ par une rotation autour de Oz des axes de coordonnées.

Il en résulte, les droites de l'un de ces groupes pouvant former un angle quelconque α avec les droites de l'autre, que contrairement à ce qui a lieu pour le troisième ordre, l'existence d'un axe de symétrie ternaire n'entraîne ici celle d'aucun plan de symétrie passant par cet axe.

Toute section de la surface par un plan perpendiculaire à Oz est une quartique plane ayant O pour centre de symétrie ternaire et dont l'équation a la forme

$$(x^2+y^2)^2 + m\,U_1U_2U_3 + n(x^2+y^2)\,tp = 0.$$

$U_1\,U_2\,U_3$ représentant (égalé à zéro) trois droites passant par l'origine et faisant entre elles des angles de 60°. On voit que cette courbe a aussi trois axes de symétrie (qui sont perpendiculaires aux droites U_1, U_2 et U_3).

Mais il importe ici de remarquer que, pour les degrés supérieurs, l'existence, pour une courbe plane, d'un centre de symétrie ternaire n'entraîne pas celles d'axes de symétrie, de même que dès le quatrième ordre nous voyons que, pour les surfaces, l'axe de symétrie ternaire n'entraîne pas l'existence de plans de symétrie.

3° *Symétrie quaternaire.* — Les troisième, cinquième, sixième, huitième, dixième et onzième groupes de termes doivent disparaître de l'équation; les quatrième, septième et neuvième groupes doivent, égalés à des constantes quelconques, représenter des cercles; le deuxième doit, égalé à une constante, représenter une courbe du quatrième ordre à centre de symétrie quaternaire. c'est-à-dire coïncidant avec elle-même après une rotation de 90° autour de ce centre.

Il faut donc que ce groupe se reproduise par la transformation $x = -y'$, $y = +x'$, et pour cela qu'il ait la forme $ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 - 4bxy^3 + ay^4$. Ainsi, l'équation se réduit à

$$(q)\left\{\begin{array}{l} Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E \\ \quad + a(x^4 + 4mx^3y + 6nx^2y^2 - 4mxy^3 + y^4) \\ \quad + 6lz^2(x^2 + y^2) + 12Fz(x^2 + y^2) + 12N(x^2 + y^2) = 0. \end{array}\right.$$

La surface n'a pas, en général, de plan de symétrie passant par Oz. Elle en a un si $m = 0$. Elle est de révolution si $a = 0$. Les sections perpendiculaires à Oz sont des courbes de la forme

$$x^4 + 4mx^3y + 6nx^2y^2 - 4mxy^3 + y^4 + \lambda(x^2 + y^2) + \mu = 0$$

qui n'ont pas d'axe de symétrie en général, mais simplement un centre *de symétrie quaternaire*.

Des remarques aussi simples conduiraient aux formules des surfaces d'ordre supérieur au quatrième, possédant des axes de symétrie. Avec les surfaces du cinquième ordre apparaît pour la première fois la symétrie quinaire.

Dans le cas des surfaces du troisième ordre, la symétrie binaire seule donne des surfaces pouvant n'avoir pas de plan de symétrie passant par l'axe; mais, dans celui des surfaces du quatrième ordre, l'existence des symétries ternaire et quaternaire n'entraîne pas plus que la symétrie binaire l'existence de tels plans de symétrie.

Au lieu de considérer les surfaces d'ordres supérieurs au quatrième, cherchons les équations des surfaces du troisième degré, présentant plus d'un axe de symétrie.

En considérant successivement les formules (β_1) et (β_2), groupant dans chacune, relativement à x, comme nous avons groupé relativement à z, nous déduirons par des raisonnements analogues, de (β_1) les formes

$$(\beta_1\beta'_1) \qquad 6pxyz + 3rx^2 + 3ty^2 + 3Bz^2 + D = 0,$$

$$(\beta_1\beta'_2) \qquad Az^3 + 3qzy^2 + 3mx^2z + 6sxy + 3Cz = 0,$$

et de (β_2) les formes

$$(\beta_2\beta'_1) \quad ax^3 + 3cxy^2 + 3hxz^2 + 6vyz + 3fx = 0,$$
$$(\beta_2\beta'_2) \quad dy^3 + 3kyz^2 + 3bx^2z + 6uxz + 3gy = 0,$$

représentant toutes des surfaces ayant aussi Ox pour axe de symétrie. En examinant ces quatre formes, on voit que les trois dernières se ramènent à un même type, qui sera par exemple (en prenant les coefficients à indices)

$$(\text{II}) \quad A_{111}x^3 + 3A_{122}xy^2 + 3A_{133}xz^2 + 6A_{234}yz + 4A_{144}x = 0.$$

La première équation peut s'écrire

$$(\text{I}) \quad 6A_{123}xyz + 3A_{114}x^2 + 3A_{224}y^2 + 3A_{334}z^2 + A_{444} = 0.$$

Pour les deux formes, le troisième axe Oy est aussi axe de symétrie binaire.

Si $A_{234} = 0$, la forme (II) représente des surfaces à centre, mais la forme (I) ne peut en représenter sans qu'il y ait dégénérescence.

Revenons aux formules (β_1) et (β_2) et cherchons si l'axe Ox peut être axe de symétrie ternaire.

La première représentera des surfaces ayant un tel axe si l'on a $p = m = s = C = 0$, $t = B$, $q = -3A$; elle se réduit alors à

$$(\text{III}) \quad A_{333}z(z^2 - 3y^2) + 3A_{224}(y^2 + z^2) + 3A_{114}x^2 + A_{444} = 0.$$

Pour (β_2), les conditions sont

$$b = u = g = 0, \qquad h = c, \qquad k = -3d$$

et l'équation devient

$$(\text{IV}) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_{111}x^3 + A_{222}y(y^2 - 3x^2) \\ & \quad + 3A_{122}x(y^2 - z^2) + 6A_{234}yz = 0. \end{aligned} \right.$$

Les surfaces (III) ou (IV) ne peuvent avoir Oy pour axe de symétrie binaire sans se décomposer.

Il est inutile de chercher si le second axe Ox peut être quaternaire, car nous avons déjà vu que la présence d'un seul axe, s'il est quaternaire, entraîne la conséquence que la surface du troisième ordre est de révolution. Nous n'aurions donc que des cas particuliers de surfaces de révolution, savoir des cas de dégénérescence.

On traiterait d'une manière analogue le cas des surfaces du quatrième ordre ayant deux ou trois axes de symétrie de même espèce ou d'espèces différentes.